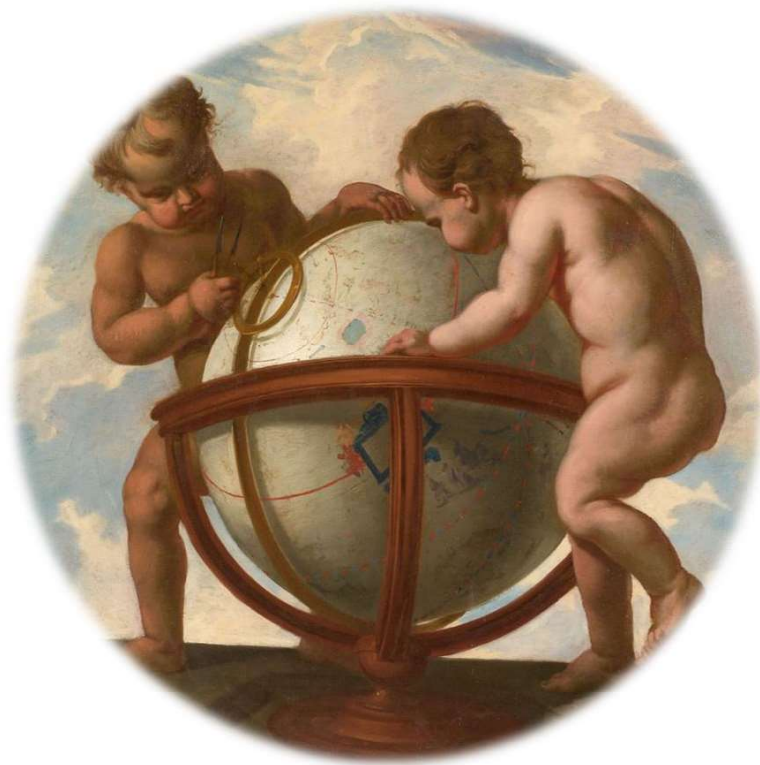




GEOGRAFIA
ASTRONOMICA
en la obra de
BENITO BAILS

MARIO RUIZ MORALES

Geografía Astronómica en la obra de Benito Bails



MARIO RUIZ MORALES

Pocos estudios hay de tan vivo interés como el de la geografía astronómica. No solo es una preparación verdaderamente indispensable para las otras secciones de la ciencia geográfica, sino que por sí sola constituye uno de los ramos del saber más dignos de ocupar la atención del hombre. Abarcando el universo infinito, familiariza el alma con las contemplaciones más grandiosas, y despierta ideas elevadas y sublimes. Es indispensable que la juventud sepa apreciar la inmensa importancia de estos estudios, que llevan en sí mismos la mejor de las recompensas, por cuanto permiten formar un concepto amplio y científico del universo.

Z. Vélez de Aragón (Nociones de Geografía Astronómica.1896)

1. INTRODUCCIÓN.



Cuando Benito Bails (1730-1797) realizó el elogio de Don Jorge Juan, dejó entrever que, en cierto modo, compartía con el sabio marino alicantino sus conocimientos geométricos y geográficos, entendidos en su primer sentido etimológico de medir y representar la Tierra. Así se expresaba el eminente matemático y arquitecto barcelonés¹, a propósito de la operación geodésica en el virreinato del Perú:

“...Tratábase de salir siempre de dudas acerca de la verdadera figura de la tierra, que se tuvo por redonda hasta fines del siglo pasado. Parecióles a algunos Filósofos felizmente atrevidos que esta figura repugnaba con las leyes del equilibrio de los fluidos, y que la convexidad de la superficie de la tierra no podía ser una misma en toda su extensión. Aunque desde el año 1672 tenía esta sospecha en su abono una observación muy sonada², no era suficiente este testimonio, y se hacía indispensable confirmarla con las operaciones de la Geometría. Es constante que si la tierra no es una esfera rigurosa, han de ser desiguales los grados de un círculo que nos figuremos la parta por medio, pasando por el Norte y el Sur, y que estos grados han de coger menos varas donde fuere mayor la convexidad, que donde fuere menor. Requería, pues, la determinación cabal de la figura de la tierra que se midiesen dos de estos grados por lo menos, el uno en el Polo, el otro debajo del Ecuador, para inferir de su diferencia cuanto la superficie de nuestro globo discrepa de la esférica, y saber a punto fijo a que cuerpo se parece”.

Una prueba consistente en favor de los conocimientos de Bails, en esta rama de las Ciencias de la Tierra, la proporcionó el propio Jorge Juan al

¹ En realidad nació en Sant Adrià de Besós. Su ayuntamiento honró la memoria de Benito Bails en en el año 2003, al publicar, en español y catalán, el librito titulado *Una aproximación a la vida de Benito Bails*. En él se recogen aspectos interesantes e inéditos, como el hecho de que fuese enterrado en la iglesia de la parroquia madrileña de San Sebastian o las novedosas informaciones de carácter familiar, recogidas en su testamento (anexo 3 de la obra). Los investigadores que hicieron posible esta publicación fueron Fermín Rodríguez Venegas e Isaias Galindo Salas, los cuales figuran como autores; no obstante, es obligado reseñar también el trabajo de campo que efectuó en Granada y Madrid, Elisabeth Navas Orihuela, a la sazón Concejala de Cultura y Educación. Dos años después se creó la Escuela Municipal de Música Benito Bails, una feliz iniciativa que reconocía una de las facetas en las que destacó también su compatriota; recuérdese que fue el autor del libro *Lecciones de clave y principios de harmonia* (1775), dedicado a María del Pilar Ana de Silva-Bazán y Sarmiento (madre de la XIII Duquesa de Alba).

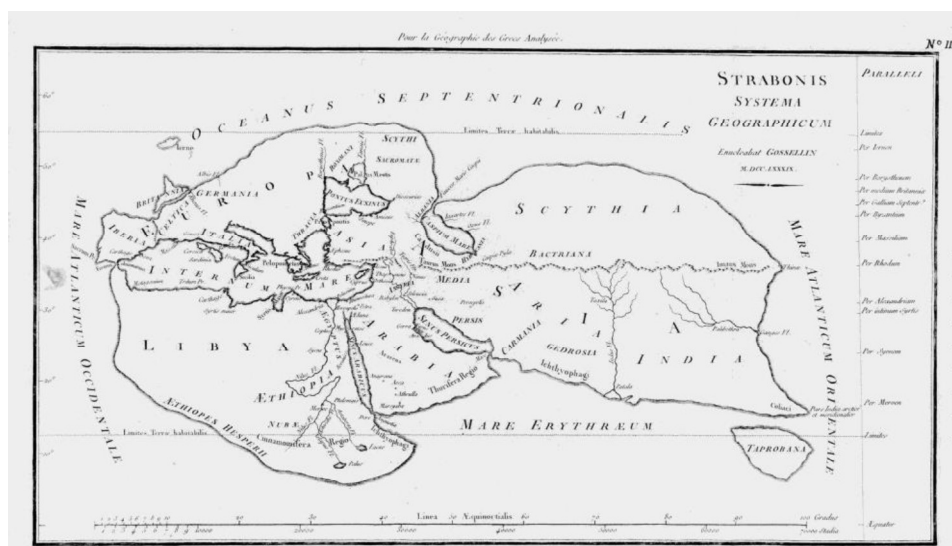
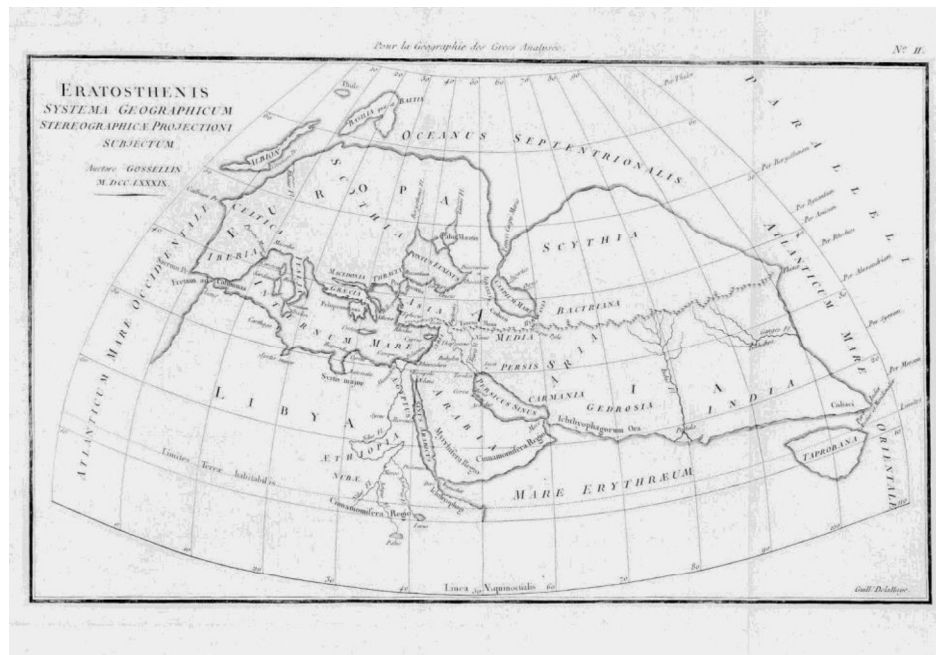
² Se estaba refiriendo Bails a las medidas pendulares de J. Richer en la isla de Cayenne. Allí constató que la longitud del péndulo que batía segundos era menor que la que tendría de haber estado localizado en París, es decir que la gravedad en la colonia era menor que en la metrópoli. Dado que la latitud del lugar en que se realizó la observación era menor que la de la estación europea, se podía deducir que la distancia al centro de la Tierra era mayor en el primero que en la segunda. En esa conclusión se basaron después I. Newton y C. Huygens para postular el modelo elipsoidal terrestre con aplastamiento polar. Pude afirmarse que Richer fue el primero en comprobar un cambio en la fuerza gravitacional sobre la superficie de la Tierra, iniciándose de ese modo la gravimetría.

recomendarlo como Director de Matemáticas en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando; un cargo que compartió con Francisco Subirás y Barra, el cual ya había sido profesor de matemáticas en el antiguo Colegio Imperial. También puede aducirse, en ese mismo sentido, el contenido de algunos de los volúmenes de la biblioteca de Bails, recientemente descubiertos por la profesora I. Arias de Saavedra Alías (Universidad de Granada) y relacionados en su interesante libro titulado *Ciencia e Ilustración en las Lecturas de un Matemático: la Biblioteca*³ de Benito Bails (2002). En efecto, aunque limite la selección a los trece que se indicarán seguidamente, sus títulos son tan trascendentes para la historia de la geografía matemática que mal podría entenderse que obrasen en poder de Bails sin que este los hubiese estudiado.

He aquí los títulos en cuestión: 1) *Géographie des Grecs analysée: ou, Les systèmes d'Eratosthenes, de Strabon et de Ptolémée comparés entre eux et avec nos connoissances modernes* (Paris, 1790); 2) *Leçons élémentaires d'astronomie géométrique et physique* (Paris, 1746); 3) *Éléments d'Astronomie* (Paris, 1740); 4) *Histoire de l'astronomie ancienne, depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'Ecole d'Alexandrie* (Paris, 1775); 5) *Dissertation sur la manière de déterminer les longitudes de la mer, en mesurant la distance de la lune au soleil et aux étoiles* (Utrecht, 1783); 6) *Traité de géométrie theorique et pratique, a l'usage des artistes* (Paris, 1774); 7) *A treatise of such mathematical instruments, as are usually put into a portable case: containing their various uses in arithmetic, geometry, trigonometry, architecture, surveying ...* (Londres, 1747); 8) *Essai de Trigonometrie Spherique, contenant diverses applications de cette science à l'astronomie* (Newchâtel, 1783); 9) *Astronomiae instauratae mechanica* (Hamburgo, 1598); 10) *Recherches sur la précession des equinoxes, et sur la mutation de l'axe de la terre, dans le système Newtonien* (Paris, 1749); 11) *La Figure de la Terre , déterminée par les observations de Mm. de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier,... et de l'abbé Outhier,... accompagnés de M. Celsius,...faites par ordre du Roy au Cercle Polaire*

³ En realidad se ignora el paradero de la biblioteca, ya que I. Arias solo halló un documento manuscrito, en que se listaban los títulos resumidos bajo el epígrafe Biblioteca de Bails, entre los fondos de Francisco Saavedra (Ministro de Carlos IV) existentes en el Archivo de la facultad de Teología de Granada. La biblioteca debió constar de 571 títulos y 840 volúmenes, sobresaliendo los 419 dedicados a las Ciencias Exactas y a la Astronomía. En el inventario figuraban 374 autores, de los que 191 fueron franceses, aunque hubiese también españoles, 72, italianos, ingleses y otros. Una característica relevante de esta buena colección científica fue la de su actualidad, pues casi el 78 % de las ediciones eran del siglo XVIII, lo que dice mucho en favor de nuestro protagonista; mención aparte merece su dominio de los idiomas, hasta el punto de poder ser calificado de políglota.

(Paris, 1738); 12) *Voyage astronomique et géographique, dans l'État de l'Eglise : entrepris par l'ordre et sous les auspices de pape Benoit XIV : pour mesurer deux degrés du méridien, & corriger la carte de l'Etat ecclésiastique* (Paris, 1770); 13) *Description Géométrique de la France* (París, 1783). Los respectivos autores fueron los siguientes: P. Gossellin, N. de Lacaille, J. Cassini, J. Bailly, F. de la Coudraye, S. Leclerc, J. Robertson, J. Trembley, T. Brahe, J. d'Alembert, P. Maupertuis, C. Maire & R. Boscovich, y C. Cassini.



Dos de los mapas presentados por Pascal François Joseph Gossellin en su obra. Ambos fueron confeccionados por él de acuerdo con las descripciones geográficas de Eratóstenes y Estrabón.

La obra de Gossellin fue preparada para presentarla al concurso convocado por la *Académie Royale des Inscriptions et Belles-Lettres*, cuyo objeto era comparar las contribuciones de los geógrafos Estrabón y Tolomeo, a la vez que se incidía sobre el nivel de sus conocimientos geográficos y el estado en que ellos los hallaron. Sin embargo el autor prefirió ampliar su contenido y referirlo a la producción cartográfica de Eratóstenes, Estrabón y Tolomeo; su decisión fue acertada ya que se le otorgó el primer premio. No obstante, en la parte dedicada al primero incluyó también sus valiosos comentarios sobre Piteas, Hiparco y Posidonio, al igual que en la de Estrabón trató además de Plinio y de Marino de Tiro. Independientemente de los interesantes estudios críticos que aportó, sobresalen sus mapas con las diferentes imágenes del ecúmene. La geodesia y la metrología también estuvieron presentes en esta interesante publicación del geógrafo y bibliotecario francés, al analizar la medida del meridiano atribuida a Eratóstenes y las dificultades encontradas al intentar fijar la equivalencia entre las unidades lineales de la antigüedad y las previas a la definitiva implantación del sistema métrico decimal.

Es muy probable que en la elección del libro publicado por N. de Lacaille influyese más que la importancia de su contenido el prestigio innegable del autor por sus trascendentales observaciones geodésicas y astronómicas. Téngase en cuenta que fue él quien comprobó por primera vez la simetría presentada por el aplastamiento polar de la Tierra, durante su celebrada expedición al Cabo de Buena Esperanza para calcular la distancia de la Tierra a la Luna⁴ y ampliar el catálogo estelar hasta entonces conocido. Aparte de tan singular comprobación midió un arco de meridiano, aunque el valor atribuido al desarrollo del grado resultase erróneo al estar afectado por la desviación de la vertical, tal como pudo comprobar más tarde el geodesta G. Everest. En todo caso la contribución astronómica más sobresaliente de este abate francés fue la identificación, a lo largo de 127 noches, de 9766 estrellas del cielo austral, nuevas en su mayor parte, así como numerosas nebulosas. Aprovechando su descubrimiento definió 14 nuevas constelaciones, a las que puso el nombre de diversos instrumentos matemáticos: *Horologium*, *Reticulum*, *Octans*, *Telescopium*,

⁴ Con igual pretensión se desplazó J. Lalande a Berlín. Ambos observaron simultáneamente (5 de octubre de 1751) la Luna en su paso por el meridiano, determinando así el valor de su paralaje y por tanto su distancia a la Tierra.

Microscopium, etc. Cuando volvió a París mandó hacer un planisferio de aquel cielo, que aún se conserva en el Observatorio de Paris.

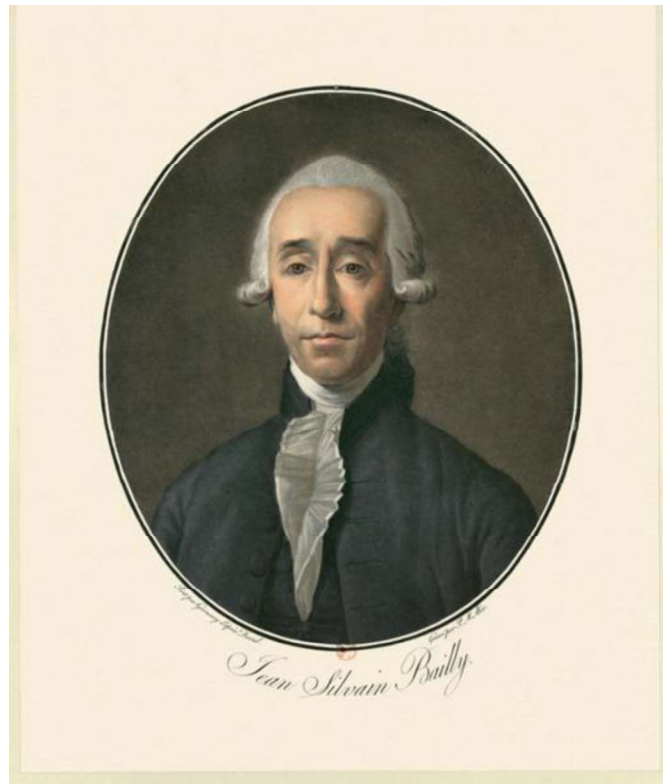


Planisferio del cielo austral en el Observatorio de París y sextante usado por N. La Caille. El cuadro fue pintado por Anne-Louise Le Jeuneux, a instancias del astrónomo.

Parecido argumento puede esgrimirse para el tercer volumen seleccionado, en el sentido de que Bails se guiara al adquirirlo más por el prestigio del autor que por el contenido del libro. Jacques Cassini, o Cassini II, era hijo del primer director del Observatorio de París y había participado, junto a su padre, en la prolongación de su meridiano⁵ iniciada en los albores del siglo XVIII; enlazando las ciudades de Dunkerque, al Norte, y de Perpignan, al Sur. Los resultados de tales trabajos los incluyó en el libro *Traité de la Grandeur et de la Figure de la Terre* (Paris, 1723), comprobando que el desarrollo del grado de meridiano decrecía al aumentar la latitud. Fue entonces cuando se expresó con rotundidad en los siguientes términos (página 292): *Ainsi, il parait avec assez d'evidence que les degrés d'un Meridien sont plus grands, plus ils sont près de l'Equateur, & diminuent, au contraire, à mesure qu'ils s'approchent du Pole, d'où l'on peut conclure que la circonference de la Terre n'est pas de figure Spherique.* Incluso llegó a calcular el cuadrado de la elipse meridiana que cifró en 0.144, es decir un alargamiento del eje polar de 0.07 con respecto al ecuatorial. Semejante resultado experimental era opuesto a los modelos teóricos que habían previsto tanto Newton como Huygens, sirviendo de

⁵ Años antes J. Picard había medido el segmento del mismo comprendido entre la ciudad de Amiens y la localidad de Malvoisine, al Sur de París. Gracias a ella dedujo el radio de la Tierra, con una fiabilidad nunca alcanzada hasta entonces. Apoyándose en ese valor pudo comprobar Newton la bondad de su ley de gravitación, un hito en la historia de la ciencia que siempre deberá ser ponderado positivamente.

detonante para que se desatara la mayor controversia científica de la historia, siempre presente en todas las discusiones de la Ilustración.



Jean Silvain Bailly, elegido miembro de la Academia de Ciencias de París por sus investigaciones en el campo de la astronomía.

El cuarto volumen seleccionado, la historia de la astronomía escrita por J. Bailly, evidencia el interés que tenía Bails por el legado científico del pasado, que tanto mediatizó el conocimiento del presente. Es sabido que la astronomía es anterior a la propia historia y que nació como testimonio del interés del hombre por observar el espacio en el que vivía. Hoy día es difícil imaginar la sensación tan extraordinaria que experimentarían aquellos primeros pobladores de la Tierra al comprobar la sorprendente regularidad que presentaban tanto los ortos y ocasos del Sol, como los de la Luna, así como la magnificencia del cielo estrellado. De la antigüedad de esta rama del saber da idea el que no se pueda concretar la época en que se descubrieron los primeros planetas⁶ y se establecieron los días de la semana a ellos asociados, atribuyéndoselos indistintamente a los caldeos y a los egipcios. En la vieja Mesopotamia estuvo tan desarrollada la astronomía que construyeron planisferios celestes y predijeron los eclipses. En el

⁶ En un principio, tanto el Sol como la Luna fueron considerados planetas.

Egipto de los faraones, por su parte, se pudo orientar la gran pirámide⁷ de Keops con incertidumbre cinco veces menor que la que dio el gran T. Brahe al observatorio construido en la isla de Ven. El libro de Bailly trata precisamente de tan remotos orígenes, hablando incluso de astronomía antes del supuesto diluvio universal. Por supuesto que estudió a lo largo del texto las aportaciones de persas, caldeos, chinos, babilonios y egipcios. La influencia de estos últimos se reconoce en los capítulos dedicados a los astrónomos griegos, a los que se les debió la sistematización de esta disciplina, como bien recogió el académico y revolucionario francés.

La selección del libro escrito por F. de la Coudraye muestra el interés de Bails por el secular problema de la longitud, una coordenada geográfica mucho más difícil de obtener que la latitud. La longitud está indefectiblemente unida al tiempo, de manera que la diferencia entre la hora correspondiente a dos lugares dados coincide con la diferencia de las horas locales respectivas. La dificultad estribó, durante siglos, en el “transporte de la hora” de un lugar a otro. Entretanto se pretendió solucionar la cuestión con diferentes métodos astronómicos, algunos de los cuales se citan en esta obra, aunque no se alcanzase con ellos la exactitud deseada. La solución definitiva comenzó a vislumbrarse en el año 1760, cuando J. Harrison⁸ inventó su famoso cronómetro H 4; sin embargo hubo que esperar al siglo siguiente para que el descubrimiento de S. Morse, en torno al año 1838, propiciase la transmisión de las señales horarias. La mala determinación de la longitud mediatizó la formación de los mapas, esa circunstancia explica acontecimientos tan trascendentales para la historia de la humanidad como el descubrimiento del continente americano y el error de Cristóbal Colón al confundirlo con el extremo oriente.

La necesidad de contar con obras de topografía para utilizarlas en sus clases a los alumnos de la Academia de San Fernando, hizo que Bails adquiriese una de las obras de S. Leclerc para incorporarla a su biblioteca. No debe extrañar el título de *Traité de géométrie theorique et pratique...* en tanto que la topografía se explicaba por aquel entonces como una mera aplicación de la geometría. El libro es un claro referente en la historia de la

⁷ A propósito de la mayor pirámide de Giza, no debe olvidarse que se trata del monumento geodésico y metrológico por excelencia. Su apotema equivale a la décima parte del desarrollo de un minuto de meridiano en aquella latitud, tal como tuvieron ocasión de comprobar los sabios franceses que acompañaron a las tropas napoleónicas cuando invadieron Egipto.

⁸ El autor del libro explica con detalle la aparición de los diferentes modelos fabricados por el relojero inglés.

topografía por sus numerosas y variadas ilustraciones, a pesar de que en ocasiones fuesen más decorativas que necesarias; la influencia de su presentación sobre la bibliografía posterior fue manifiesta. Consta de 10 capítulos, dedicando los cinco primeros a cuestiones teóricas y los siguientes a las aplicaciones; así en el séptimo se calculan las superficies, en el octavo se explican las operaciones, en el noveno se obtienen los volúmenes. El décimo se dedicó al levantamiento de planos, mediante el empleo de la cuerda, el semicírculo, el compás de proporción y la plancheta.



Grabado de Sebastien Leclerc (1671). Luis XIV visitando la Academia de Ciencias. Al fondo se aprecia el Observatorio de París en construcción.

Algún tratado sobre los instrumentos matemáticos tampoco podía faltar en la biblioteca de Bails, su elección del libro escrito por J. Robertson no pudo ser más acertada. En él se explican además de las obvias lecciones de geometría, las descripciones de todas las componentes que integraban el clásico estuche de dibujo. De la utilidad de dichos instrumentos habla en un

prólogo especialmente interesante, indicando en primer lugar que Arquitectos e Ingenieros no podrían elaborar proyecto alguno sin su concurso; no obstante, es obligado subrayar la documentada recopilación bibliográfica que se incorporó al mismo. De entre todos los autores me permito elegir a G. Mordante por su obra sobre compases, publicada en Amberes (1584), la Geometría Práctica del jesuita C. Clavius (1604), en la que describió el llamado instrumento de partes, y sobre todo la de Galileo, aparecida dos años después, centrada en el empleo del compás geométrico y militar. Igual de relevante fue el trabajo *The description and use of the sector* (1624) efectuado por E. Gunter⁹, ampliamente usado en los años siguientes para las observaciones astronómicas, especialmente las del Sol.

La práctica totalidad de los problemas planteados en la geografía matemática se han venido resolviendo mediante la trigonometría, plana y esférica, se entiende por tanto que Bails dispusiera de seis volúmenes dedicados a esta rama de la geometría. El fin último de la misma es la determinación de los lados y ángulos de los triángulos, sean planos o esféricos: en el primer caso se localizarían en un plano y en el segundo sobre una superficie esférica¹⁰. El haber seleccionado el tratado firmado por J. Trembley obedece a la gran valía que tuvo este prolífico matemático ginebrino, aunque su figura haya quedado un tanto olvidada. El texto es esencialmente analítico y muy completo¹¹, con la deducción de la mayor parte de las fórmulas frecuentemente empleadas. Asimismo son sumamente didácticas sus aplicaciones a casos astronómicos concretos, como hallar la altura del polo (latitud) conocida la declinación del Sol, calcular las coordenadas de las estrellas y las relaciones entre las que presentan en los diferentes sistemas. Especialmente importantes fueron su capítulo décimo,

⁹ A este matemático, astrónomo, topógrafo y constructor de instrumentos se debió uno básico para la agrimensura: la cadena de Gunter, también llamada de agrimensor; con una longitud de 66 pies (≈ 20 m). Dicho instrumento se empleó con profusión en los países anglosajones, considerando su desarrollo como una unidad de longitud, denominada cadena. A título de curiosidad añado que para calcular la superficie de una figura irregular, se medía su perímetro y se hallaba el número total de cadenas; la superficie se obtenía dividiendo ese número por cuatro y elevándolo al cuadrado; el resultado se expresaba en cadenas cuadradas. Es evidente que con semejante práctica se estaba asimilando la superficie a la de un cuadrado.

¹⁰ Los lados de los triángulos planos son líneas rectas y los de los triángulos esféricos arcos de círculo máximo (intersección de un plano diametral con la esfera). Es bien sabido que la suma de los ángulos de un triángulo plano es de 180° , en cambio es menos conocido el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor de 180° y menor de 540° . En la trigonometría plana puede haber triángulos con un ángulo recto, en la esférica puede haber triángulos con varios lados y ángulos de 90° . Las fórmulas trigonométricas suelen llevar el nombre de los astrónomos que las dedujeron o que las transformaron para que se les pudiesen aplicar los logaritmos: Bessel, Briggs, Delambre, Gauss, Neper, Tolomeo son buenos ejemplos de las mismas.

¹¹ Incluso trató de la mecánica celeste.

Usage de la trigonometrie dans la théorie de la figure de la terre y el undécimo, De l'usagé de la trigonometrie sphérique dans le calcul astronomique de la précession des équinoxes, de l'aberration, nutation, du changement de position des astres produit par la variation de l'obliquité de l'écliptique.



Ilustraciones de la obra Astronomiae instauratae mechanica: alegoría de la portada y grabado del globo celeste construido por Tycho Brahe.

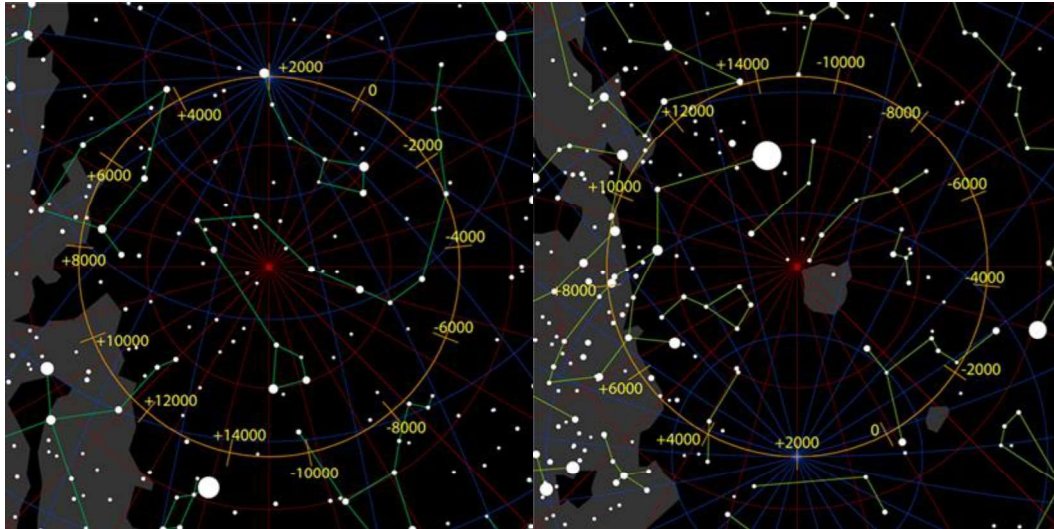
Bails disponía en su biblioteca de uno de los 100 ejemplares de la obra *Astronomiae instauratae mechanica*, que editó el mismo Brahe. En ella se describió el Observatorio de Uraniburgo, construido en la isla de Ven bajo los auspicios del rey de Dinamarca. También se detallan en la misma los instrumentos diseñados por Brahe y sus aplicaciones más inmediatas, unos aparatos que tantas veces se han vuelto a imprimir desde entonces: cuarto de círculo, grande y pequeño, sextante, semicírculo, trigonetro, esfera armilar zodiacal, esfera armilar ecuatorial, un instrumento para medir distancias y un globo celeste de seis pies, sobre el que se localizaron todas las estrellas identificadas por Tolomeo y los dibujos de las constelaciones. Además de varias vistas del observatorio, ilustraba la publicación un magnífico grabado del gran cuadrante mural que presidía el salón principal de aquel centro, acompañada de un retrato del propio astrónomo, y que

probablemente sea una de las imágenes astronómicas más divulgada. Este singular astrónomo, el mejor de su tiempo, fue el maestro de otros que también tienen un lugar de honor en la historia de la astronomía: J. Picard y J. Kepler. Como es notorio, este último se basó en la cuantiosa información proporcionada por las observaciones de Marte, realizadas por Brahe, para describir las órbitas planetarias y terminar enunciando las tres leyes que revolucionaron el modelo científico del universo.

El libro de J. d'Alembert con que contaba Bails fue uno de los de mayor calado científico de su biblioteca, pues la precesión y la nutación son dos fenómenos complejos que requieren para su total comprensión conocimientos elevados de física y de matemáticas¹². El fenómeno de la precesión ya fue descubierto por Hiparco en el siglo II a.C., aunque su explicación rigurosa no se produjo hasta que lo hizo el matemático y enciclopedista francés en esta obra. En ella demostró que los movimientos de precesión y nutación, para un cuerpo de revolución que girase en torno a su eje polar, estaban ligados por la relación $H = (C-A) / C$, donde C y A son respectivamente los momentos de inercia con relación al eje polar y con relación a un eje situado en el plano del ecuador. La constante de precesión, o aplastamiento dinámico, se determinaba por observaciones astronómicas y coincidiría con el geométrico en el supuesto de cuerpo homogéneo. De entre sus 16 capítulos, es muy destacable desde el punto de vista geodésico el noveno: *Conséquences qui résultent de la Théorie précédente, par rapport à la figure de la Terre*. En él se valió de las

¹² En la geometría esférica se definen los polos de un plano como las intersecciones con su superficie de una recta perpendicular a él y que pasa por el centro de la misma. Los polos Norte celeste y Sur celeste son los polos del plano del ecuador, en tanto que son la intersección del eje del mundo (el eje de rotación de la Tierra) con la esfera celeste (hipotética esfera sobre la que se proyectan todas las estrellas). El plano de la eclíptica, sobre el que se traslada la Tierra alrededor del Sol, tiene también dos polos: Norte y Sur. La intersección del plano del ecuador con el de la eclíptica es la llamada línea equinoccial, la cual corta a la esfera celeste en los puntos equinociales (primavera y otoño). La precesión equinoccial es debida al abultamiento ecuatorial de la Tierra y tiene como efecto inmediato el giro del eje del mundo en torno al eje polar de la eclíptica, traducido en un giro del polo Norte celeste en torno al homólogo de la eclíptica, a razón de unos 50 '' por año; es decir que tardaría unos 26000 años en efectuar la revolución completa, a ese periodo de tiempo tan dilatado se le denomina año platónico. No obstante es más señalado el correspondiente retroceso de los puntos equinociales: el equinoccio de primavera, también llamado Punto Aries, se proyecta en nuestros días sobre el signo Piscis, al igual que el del otoño (Punto Libra) lo hace sobre Virgo. El cono descrito por el eje del mundo está festoneado por otro movimiento, llamado de nutación, con una amplitud más pequeña ($\approx 9''.2$) pero nada despreciable y con un periodo de 18 años y $2/3$; este fenómeno añadido es debido a la no coincidencia de las órbitas de la Luna y de los planetas con el plano de la eclíptica, fue descubierto por J. Bradley en 1747. Dado que la estrella polar coincide sensiblemente con el polo Norte celeste, es obvio que no siempre ha sido así, de hecho en el antiguo Egipto la estrella del Norte era la Thuban (*α Draconis*) de la constelación del Dragón; la estrella Vega de la constelación Lira lo fue también mucho antes (≈ 12000 a.C.) y lo será de nuevo dentro de otros 12000 años.

fórmulas deducidas por A. Clairaut, para concluir que de acuerdo con los valores deducidos para la precesión equinoccial no podía suponerse que la Tierra fuese un elipsoide sólido sino que también debería tener una capa fluida, tal como probaba la observación.



La precesión de los polos celestes en torno a los eclípticos, una representación del año platónico en los dos hemisferios: septentrional (i) y austral (d).

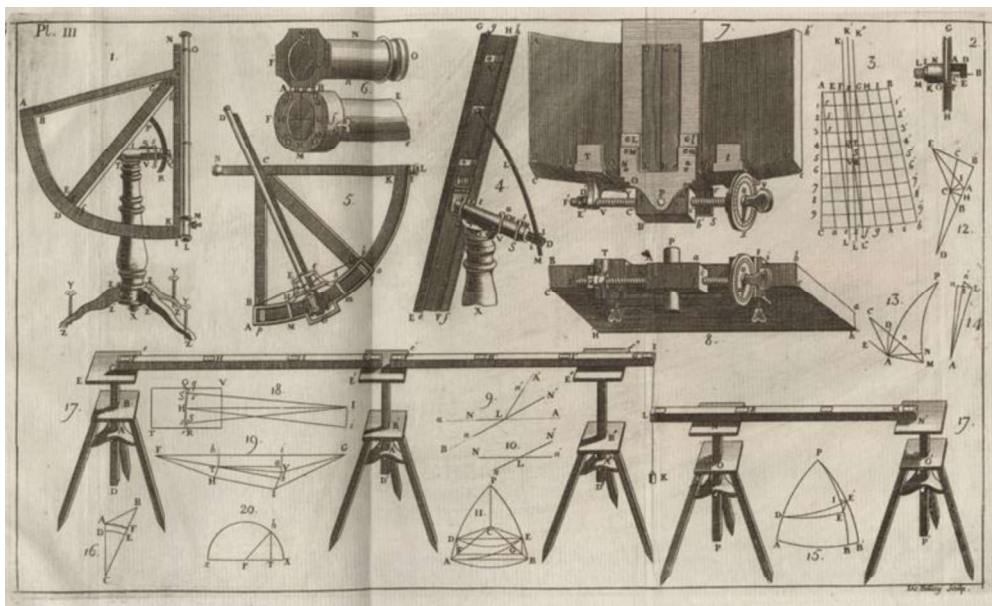
La controversia científica sobre la figura de la Tierra, ya referida, finalizó gracias a las dos expediciones geodésicas y astronómicas organizadas por la Academia de Ciencias, atendiendo las propuestas formuladas primero por L. Godin para medir un arco del meridiano en las proximidades del ecuador (Virreinato del Perú) y después por P. Maupertuis, para hacer lo propio en Laponia. En la americana colaboraron, como es conocido, los jóvenes marinos Jorge Juan y Antonio de Ulloa; aunque en un principio no fuesen bien recibidos por los sabios franceses, especialmente por P. Bouguer, al final reconocieron que su participación había sido decisiva para el éxito de la operación. Esa última circunstancia fue certificada después tanto por la Academia como por la *Royal Society* de Londres, que les concedieron los honores correspondientes. Bails tenía en su biblioteca el libro en el que los dos españoles dieron cuenta de los interesantes trabajos allí realizados, el título completo del mismo fue el siguiente: *Observaciones Astronómicas y Phisicas hechas de Orden de S Mag, en los Reynos del Perú. Por D. Jorge Juan, Comendador de Aliaga en la Orden de S. Juan, Socio Correspondiente de la R. Academia de las Ciencias de París, y D. Antonio de Ulloa, de la R. Sociedad de Londres, ambos capitanes de Fragata de la R. Armada, de las quales se deduce la Figura, y*

Magnitud de la Tierra, y se aplica a la Navegación, el cual se publicó en Madrid el año 1748.

Benito Bails disponía igualmente del libro publicado por P. Maupertuis, informando a la comunidad científica del resultado de la expedición a Laponia; esta partió de Dunkerque en el año 1736, es decir un año después que la de América. La publicación se estructuró en tres libros: dedicándose el primero a la geodesia, el segundo a la astronomía y el tercero a la gravimetría. El de geodesia se dividió en dos partes, una de 6 capítulos para detallar las observaciones angulares, y las medidas lineales, asociadas a la cadena triangular que se extendió a lo largo del meridiano de Tornio; la otra, con 9 capítulos, se refirió al ajuste y compensación de los datos observados. El segundo libro constó de 8 capítulos, en los que se explicaron las determinaciones del acimut, de la latitud y de la longitud, aunque en el último se efectuasen también observaciones para calcular la declinación magnética. Finalmente, en el tercero, con 7 capítulos, se estudió la gravedad y se detallaron las mediciones que permitieron a Clairaut demostrar que su intensidad aumentaba con la latitud del lugar. Una vez concluida la operación, Maupertuis obtuvo el desarrollo de un grado de meridiano para una latitud media de $66^{\circ} 20'$, estimándolo en 57438 toesas, es decir alrededor de 111.947 km. Tanto ese resultado esencialmente geométrico, como los gravimétricos, fueron tan elocuentes que el día 13 de noviembre de 1737 manifestó a la Academia de Ciencias de París, reunida en sesión pública y solemne, que sus medidas probaban con toda claridad que la Tierra estaba considerablemente achatada por los polos. En parecidos términos se pronunciarían siete años después los expedicionarios franceses y españoles cuando volvieron a Europa.

Tras el éxito de esas dos expediciones y de otras mediciones análogas realizadas en latitudes muy dispares, la controversia entre newtonianos y cartesianos comenzó a ser superada; imponiéndose paulatinamente el elipsoide oblato en detrimento del prolato, en cualquier caso la era esférica de la Tierra quedó superada en la Ilustración para dar paso a la elipsoidal. Entre esas nuevas medidas que corroboraban dicha superación destacó la protagonizada por los jesuitas C. Maire y R. Boscovich en los estados pontificios. Allí midieron un arco de meridiano, entre Roma y Rimini, y comprobaron la bondad geométrica de la representación cartográfica de los mismos. Finalizados sus trabajos publicaron en Roma (1755) el preceptivo

informe: *De Literaria expeditione per Pontifician ditionen ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam*. Años después lo tradujeron al francés, con el título ya citado, siendo esa versión la que consiguió Bails. La obra se dividió en 5 libros: el primero, cuarto y quinto fueron escritos por Maire. En el primero se relataron todos los antecedentes históricos relacionados con el estudio de la figura de la Tierra, el segundo concretó la medición del grado y el tercero corrigió el mapa de los Estados Pontificios. El cuarto fue una buena lección de astronomía práctica, incluyendo modificaciones muy útiles para mejorar la calidad de las observaciones, como un micrómetro excelente. El quinto trató de la figura de la Tierra, deducida del equilibrio y de la medición de grados. Es sumamente reveladora la afirmación que se contiene en la presentación de esta obra: *C'est un honneur pour cette Compagnie de voir des Souverains Pontifes travailler sur son plan à la perfection de l'Astronomie & de la Géographie*.



Ilustraciones en la obra de Marie y Boscovich. Se aprecian los sectores circulares, el micrómetro y las reglas para medir las bases de la triangulación

Además de las mediciones anteriores, se procedió a la comprobación de algunas de las que ya se habían realizado muchos años atrás. Así procedió Maupertuis, cuando regresó de Laponia, con el arco de Picard, rectificando su amplitud angular y por tanto el desarrollo del arco. Su evaluación fue de 57183 toesas, valor que comparó con las 57097 obtenidas para el grado al Sur de París. Fruto de ello fue no solo el rechazo del modelo elipsoidal de los cartesianos, sino su consejo de que convendría revisar la medida del

meridiano de Francia. La Academia aceptó la sugerencia de Maupertuis y encargó el trabajo a Lacaille y a Cassini de Thury¹³, hijo de Cassini II. Ambos astrónomos y geodestas proyectaron y observaron una nueva triangulación, que también discurrió entre Dunkerque y Perpignan. Durante esa campaña midieron también el arco de paralelo limitado por la montaña de Sète y la de Saint-Victoire¹⁴, en la provincia de Aix en Provence. Los cálculos de meridiano y de paralelo vinieron a confirmar otra vez el achatamiento polar de la Tierra, tal como recogió el mismo Cassini en su obra *La Meridienne de Paris vérifiée*¹⁵. En ella tuvo que admitir finalmente los errores de su padre y dar por bueno el modelo que asimilaba la Tierra a un elipsoide achatado por los polos, tal como venían defendiendo los newtonianos. Ciertamente, en el segundo apartado de la primera parte (página 113) escribió: *Puisque les degrés du Meridien décroissent en approchant vers l'Equateur, il est clair que la Terre doit être aplatie vers les Poles; mais cet aplatissement paroît peu considerable*¹⁶.

Sin embargo no fue esa la obra que adquirió Bails para su biblioteca sino otra que publicó el mismo autor, casi cuarenta años después: *Description Géométrique de la France*. Con ella se trató de responder a la necesidad que tenía el gobierno de contar con mapas fidedignos del territorio, sobre los que proyectar obras públicas que intercomunicaran todas las provincias del reino e hicieran florecer el comercio; el trabajo fue encargado por el *Contrôleur général des finances* Ph.Orry a los Cassini (padre e hijo). Cassini III se apoyó en una nueva triangulación, cuyos vértices fueron todos representados en el mapa que acompañó a la citada publicación, además de la posición de 400 localidades y 3000 objetos, mejorando notablemente el que ya había presentado a la Academia de Ciencias en 1745. En este libro se incluye al final una interesante aproximación a los inicios de la nivelación en Francia, dando cuenta también de la conducción del agua a Versailles, cumpliendo así los deseos de Luis XIV.

¹³ Cesar-François Cassini nació en Thury-sous-Clermont, en la región de Picardie (al Norte de Francia). También fue llamado Cassini III, ya que fue hijo y nieto de astrónomos. Su abuelo y fundador de la dinastía fue el italiano Giovanni Domenico Cassini, el cual fue llamado a Francia por Luis XIV, siguiendo los consejos de Picard, para que se hiciese cargo del Observatorio de París. Cassini I fue el último de los grandes astrónomos que se negaron a aceptar la teoría heliocéntrica de N. Copérnico.

¹⁴ Fue immortalizada por Paul Cézanne.

¹⁵ El título completo fue: *La Meridienne del'Observatoire Royal de Paris, vérifié dans toute l'étendue du Royaume par de nouvelles observations*. (Paris. 1744).

¹⁶ Poco más adelante lo calculó y halló un valor de 1/286.



Cartela del mapa de Francia formado por Cassini de Thury, presentado a la Academia de Ciencias de París en el año 1745.

Aunque pudiese resultar chocante que fuesen franceses la mayor parte de los autores elegidos por Bails, no debe de sorprender ese hecho, puesto que durante el periodo de la Ilustración era Francia una fuente continua de conocimiento, claramente impulsado por la Academia de Ciencias de París. Otra explicación más personal es que su formación académica la adquirió en aquel país: en Perpignan la primaria, en Toulouse la superior, completándola en la ciudad de París, a la que llegó con 21 años. Allí se consolidaría su interés por las matemáticas, llegando a integrarse en el núcleo de la vida intelectual de París tras conocer a Nicolás de Condorcet¹⁷ y al mismo d'Alembert; una prueba inequívoca de que sus conocimientos ya deberían ser sobresalientes en aquella época. Es muy probable que fuese este último quien despertase en él una mayor curiosidad por todos los temas relacionados con la geografía astronómica, dada su condición de especialista en la materia.

¹⁷ Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet, revolucionó el cálculo integral de su tiempo con la publicación *Essai sur le calcul integral* (1765), sorprendiendo muy gratamente a Jean le Rond d'Alembert. Para Condorcet d'Alembert fue el digno sucesor de Newton.

D'Alembert sintetizó magistralmente todos sus conocimientos, al respecto, en su celebrado *Discours préliminaire ou Analyse des recherches sur différents points importants du système du Monde* (1754). Tras enjuiciar la proliferación de medidas geodésicas, concluyó que el problema de la verdadera figura de la Tierra estaba todavía lejos de ser resuelto en su integridad, pues dependía de su constitución interna, de su grado de fluidez y hasta de su historia. A tenor de sus propias investigaciones concluyó su análisis con estas palabras:

“Tel est l'état où se trouve pour le présent l'importance question de la figure de la terre. On voit combien sa solution demande encore d'observations et de recherches. Aidé du travail de mes prédécesseurs, j'ai tâché de préparer les matériaux de ce qui restà faire, et d'en faciliter les moyens. Quel parti prendre jusqu'à ce que le temps nous apporte de nouvelles lumières¹⁸? *Savoir attendre et douter*”.



Jean le Rond d'Alembert como geómetra, sosteniendo un compás en su mano derecha. Escultura de F. Lecomte (1789). Museo del Louvre.

¹⁸ La nueva luz citada por este gran matemático llegaría casi 200 años después con el inicio de la era espacial y el consiguiente desarrollo de los satélites geodésicos, que sin embargo vinieron a confirmar la bondad de la metodología clásica al calcular los semiejes del elipsoide y su aplastamiento, así como a concretar, en gran medida, la relación de ese modelo matemático con la superficie física del geoide.

Durante su estancia en París, Bails fue contratado por el embajador de España. Allí continuó prestando sus servicios hasta que, en 1761, se trasladó a Madrid, acompañando a su titular, Jaime Masones de Lima, conde de Montalvo, al cesar este en su cargo. En París había conocido al XII duque de Alba¹⁹, siendo él quien lo introdujo en la corte y le presentó a personajes tan influyentes como Campomanes o el Secretario de Estado Ricardo Wall, con los que llegó a entablar amistad. Su prestigio fue en aumento y Jorge Juan, que estaba al tanto de su formación, decidió proponerlo como Director de Matemáticas para la Real Academia de San Fernando. Bails no tardó mucho en iniciar su extensa producción bibliográfica, pues en el año 1772 ya aparecieron sus *Tratados de matemática para las escuelas establecidas en los regimientos de infantería*²⁰, que realizó junto al teniente coronel Jerónimo Capmany. En ella mostró su erudición en todo lo referente a la Geografía Matemática, esto es en Áreas de Conocimiento tales como la Astronomía esférica, la Geodesia, la Cartografía, la Topografía y en la Trigonometría (plana y esférica), una rama de la geometría ligada a todas ellas. Bails las consideró, con razón, como una de las múltiples aplicaciones de las matemáticas, de ahí que las incluyera a todas ellas en las numerosas obras que publicó al respecto. A ponerlo de manifiesto se consagrarán los capítulos que siguen.

No todo fueron facilidades en la vida de Benito Bails, pues a sus desavenencias con los jesuitas hubo que añadir sus problemas con la Inquisición, que culminaron con su destierro a Granada²¹ después de su estancia en prisión, tras su arresto en 1791. Bails sufría desde 1772 las

¹⁹ Fernando de Silva Álvarez de Toledo

²⁰ Cumpliendo el encargo realizado por el Inspector General de Infantería Alejandro O'Reilly, el cual llegó a ser Gobernador de Luisiana y Capitán General de Andalucía. Su título completo fue *Tratados de Matemática, que para las escuelas establecidas en los Regimientos de Infantería, por particular encargo de su Inspector general el Exc^{mo}. S.^{or} Conde de O'Reilly, Teniente General de los Ejércitos de S. M. y Comendador de Befayan en la Orden de Alcántara, han escrito El teniente Coronel graduado D. Gerónimo de Capmany, Sargento Mayor del Regimiento de la Corona, y , Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando, Individuo de las Reales Academias de la Lengua Española, de la Historia y de las Ciencias Naturales y Artes de Barcelona*. Bails debió sentirse profundamente dolido por las críticas improcedentes que recibió esta obra suya, pues concluyó el prólogo del primer tomo de sus Elementos de Matemática con estas palabras: “Los que no están versados en estas materias tendrán lo que basta para oír con desconfianza a los que murmuraren de nuestro proceder, murmurado ya luego que salieron a la luz unos tratados que nos encargó el Inspector General de la Infantería, por hombres que con su osadía en decidir, piensan que suplen la instrucción que tienen muy escasa”, el subrayado es mío.

²¹ La profesora Arias revela que estuvo recluido en el Convento de Carmelitas Descalzos que existía, en el actual Carmen de los Mártires, hasta su destrucción en 1842. El topónimo Mártires hace referencia a los cristianos que perecieron en las mazmorras musulmanas construidas en aquellos parajes. Granada fue por tanto destino obligado de ilustres personajes, puesto que Bails fue precedido cuarenta años por Zenón de Somodevilla, marqués de la Ensenada, al que se prorrogó el destierro en el Puerto de Santa María.

secuelas de una hemiplejía, que le inutilizó su mano derecha, un hecho que fue tenido en cuenta en 1793, al ser indultado por el generalísimo Godoy, pudiendo volver a Madrid y continuar con su actividad docente en la Academia de San Fernando, hasta el final de sus días (1797). Como es obvio las dificultades padecidas por Bails fueron debidas a su condición de libre pensador ilustrado y por ende con amplios horizontes; unas circunstancias muy mal vistas por los cortesanos que pululaban en torno al rey²². Como botón de muestra de su pensamiento, me permito reproducir parte del párrafo con que concluyó su elogio de Jorge Juan, al referirse a su mentor, comentaba: "...Miraba no con desprecio (en él no cabía), sí con lástima a muchos españoles de corazón tan ceñido, como limitados de entendimiento que no conocen más patria que la Ciudad, la Villa, la Aldea, el rincón donde nacieron...".

Benito Bails gozó en su tiempo de merecido prestigio, no debe de olvidarse que gran parte de su obra la dictó ya hemipléjico y que era un verdadero políglota. Ocupó el sillón U de La Real Academia Española, siendo elegido miembro supernumerario en el año 1765 y académico de número en 1777. En el mundo de la enseñanza también gozó de la debida consideración, pues sus Libros de Matemáticas fueron declarados de texto en numerosos centros, tanto en la España peninsular como en sus territorios de ultramar. Dos ejemplos singulares, que me he permitido seleccionar, son La Real Maestranza de Caballería de Granada y el Real Consulado de Buenos Aires; evidenciándose en ambos que la vigencia de sus trabajos perduró más que el protagonista.

Del primero se conserva un documento, especialmente interesante, fechado el día 25 de agosto del año 1806, en el que se detallan los exámenes de matemáticas a que fueron sometidos los alumnos de aquella institución. Contemplado desde la perspectiva actual, sobresale la solemnidad del acontecimiento, puesto que el examen en sí fue acompañado de una arenga dada por Luis Dávila y Maza, Primer Director de la Real Sociedad Económica de Granada²³. Mención especial merece el riguroso y documentado discurso pronunciado por Francisco Dalmau²⁴, Profesor de

²² Hoy día se acepta que fueron ellos los que formularon falsas denuncias a la Inquisición, de las que no queda rastro alguno.

²³ En ella formuló la siguiente pregunta retórica ¿Qué sería de la Filosofía sin el noble auxilio de las Matemáticas?

²⁴ Este catalán insigne fue el autor de los primeros planos de la ciudad de Granada y de su entorno, con fiabilidad geométrica.

Matemáticas del Real Cuerpo de Maestranza, el cual versó sobre la Necesidad e Importancia de las Matemáticas²⁵. Bajo su dirección se realizaron los citados exámenes²⁶, siendo los examinadores: Josef de Biedma, Capellán Real; el Marqués del Cerro y Juan de Salazar y Olmedilla, en calidad de Mestranes. El último discurso corrió a cargo de Joaquín Durán, miembro de la Real Maestranza y Maestro fiscal de la misma, siendo su título Origen, Excelencia y Utilidad de las Matemáticas. Se cerró tan brillante acto con una canción recitada por Fernando Osorio Calvache, Segundo Director de la Real Sociedad Económica de Granada; la poesía alababa tanto a las Ciencias Exactas como a la Real Maestranza que las protegía.

EXÁMENES
DE MATEMÁTICAS
QUE SUFRIERON LOS ALUMNOS
DE LA CLASE
DE LA REAL MAESTRANZA
DE CABALLERÍA DE GRANADA
EL DÍA 25 DE AGOSTO DE 1806,
AMENIZADOS
*Con una Oración inaugural, y varias piezas de
Eloquencia y Poesía.*



CON LICENCIA: EN GRANADA
EN LA IMPRENTA DE D. MANUEL MORENO.
AÑO DE MDCCCVI.

La segunda prueba ratifica la presencia de la obra de Bails en la Argentina, pues a instancias de Cristóbal Gómez Guemez imprimió la Academia de San Fernando trescientos ejemplares de la Aritmética, extraída del primer tomo de sus Principios de Matemáticas. La petición se hizo en nombre del

²⁵ Consideradas por él como la base de todas las ciencias de la naturaleza.

²⁶ Dado que en la Academia de la Real Maestranza se seguía el método de Benito Bails, se evaluaron todas las materias contenidas en su Compendio de Matemáticas: Aritmética, Geometría, Trigonometría, Álgebra, Geometría Sublime, Geografía, Dinámica, Hidrodinámica, Óptica y Astronomía.

Real Consulado de Buenos Aires, con el propósito de contribuir a la formación de los alumnos de la Escuela de Náutica. El libro desarrollaba sus 62 epígrafes en 217 páginas, dedicando las dos siguientes al anuncio de las publicaciones que se podían adquirir en la conserjería de esa misma Academia.

La metodología impuesta por Benito Bails en sus obras matemáticas sirvió de referencia para otros autores, entre los que cabe indicar al matemático granadino Josef Mariano Vallejo y Ortega, que también fue profesor de la Academia de San Fernando. Suya fue la obra que trató de actualizar las aportaciones geométricas de su maestro: *Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails*, impresa en Madrid durante el año 1806. En su prólogo se congratula la Academia de autorizar la edición del

“cuaderno de *Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails*, que le presentó Don Josef Mariano Vallejo, persuadida de que no tanto se dirigiría a perfeccionar la obra de Bails, como a adelantar la misma Geometría, que es el fundamento de todas las Artes. Y aunque los trabajos de un profesor tan benemérito como Vallejo, de cuya ciencia y talento tiene repetidas pruebas la Academia, no podían menos de serle muy agradables, ya por ser fruto de las investigaciones de un sujeto que se ha formado en la misma casa, ya también por el esmero con que ha desempeñado cuantos encargos ha puesto a su cuidado; sin embargo, para proceder con el acierto correspondiente en un punto de tanta trascendencia, quiso oír el voto de sus individuos antes de pasar a la publicación de las expresadas *Adiciones*. Con esto ha tenido ocasión de entender que de la obra de Vallejo puede sacar la estudiosa juventud grandes ventajas y utilidades”.

No obstante, la influencia de Bails se dejó sentir también en una de las aportaciones más conocidas de Vallejo, su *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas*, reeditado en numerosas ocasiones (1819-1840), figurando en su tomo segundo muchas de las disciplinas abordadas por Bails como mera aplicación de las matemáticas. Vallejo también prestó el máximo interés al estudio de la forma y dimensiones de la Tierra, hasta el extremo de poderlo catalogar como uno de los geodestas españoles más señalados del siglo XIX. Esa circunstancia me pareció tan relevante que decidí incluir como anexo, de este trabajo²⁷ sobre Bails, las contribuciones geodésicas del

²⁷ El matemático Mariano Vallejo (1779-1846) y la figura de la Tierra.

granadino, entendiendo que de ese modo se enriquecía la reivindicación del arquitecto y matemático catalán.

Todo el buen nombre de Bails se fue disipando al adentrarse en el nuevo siglo XIX, hasta el extremo de que el gran matemático y Nobel José Echegaray y Eizaguirre ni llegó a mencionarlo como autor destacado de la Ilustración en España, pese a recordar a Jorge Juan, uno de los principales mentores del arquitecto catalán. En efecto, cuando escribió el discurso de ingreso en la Academia de Ciencias²⁸, dedicó el siguiente párrafo al estado de las matemáticas en España durante el siglo XVIII: “...Otro siglo de gloria para Europa, otro más de silencio y abatimiento para nuestra España...Ciertamente es, señores, que en las ciencias aplicadas...hay dos nombres ilustres y de reputación europea que yo debo recordar hoy, siquiera por dar un rayo de luz a cuadro tan sombrío: son éstos don Antonio de Ulloa y el insigne don Jorge Juan. Yo reconozco el profundo saber de ambos marinos, y aprecio en lo que valen sus interesantes trabajos geodésicos...Pero estos tres nombres²⁹ que acabo de citar no disminuyen la fuerza, inquebrantable por desgracia, del severo fallo que sobre el periodo que reseño lanza la historia”.

Los méritos de Benito Bails no fueron reconocidos hasta la segunda mitad del siglo XX, gracias a los trabajos de diversos autores; de entre todos ellos se han seleccionado para esta ocasión los siguientes: en primer lugar a los profesores Mariano Hormigón Blánquez y Elena Ausejo Unizar autores del texto *Spanish Initiatives Bring Mathematics in Spain into the International Mainstream*³⁰. En él se calificó a Bails como el matemático español más influyente de finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, recordándose además que los diez volúmenes de sus *Elementos de Matemática*, publicados entre 1772 y 1783 por encargo de la Academia de San Fernando, fueron varias veces reeditados; en el año 1776 fueron resumidos en los tres volúmenes de que constaron sus famosos *Principios de Matemática*. Más reciente, año 2015, es la reseña debida a Santiago Garma Pons³¹, para el que Bails fue el matemático más prestigioso del periodo comprendido entre 1750 y 1810, superando a otros tan conocidos

²⁸ El discurso, demasiado demoledor y subjetivo para el periodo a que nos estamos refiriendo, se tituló *Historia de las matemáticas puras en nuestra España* y fue leído el 11 de marzo de 1866.

²⁹ Justo antes se había referido también a otro marino y matemático: Gabriel Ciscar y Ciscar.

³⁰ Capítulo tercero de *History of Mathematics. Vol. 23 (MATHEMATICS UNBOUND. The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945)*. 2002. *American Mathematical Society*.

³¹ *Las Matemáticas y la Cultura Científica en la España del siglo XIX*. Universidad Complutense. Madrid.

como Chaix y Vallejo; señalando además que sus obras fueron usadas como libro de texto hasta mediados del siglo XIX. Más adelante apuntaba que con sus enseñanzas en la Academia, junto a las de otros profesores, se creó “el clima de estudio e investigación, particularmente para las matemáticas, hasta el punto de que esta institución, junto con el Real Seminario de Nobles de Madrid y las Academias Militares fueron el máximo exponente de esta ciencia en España hasta los primeros años del siglo XIX”. La propia Real Academia de Bellas Artes de San Fernando sitúa a Benito Bails como un profesor que estaba a la misma altura de un personaje tan carismático como Francisco de Goya y Lucientes, que también impartió sus clases en el mismo centro.



Alegoría de la fundación de la Real Academia de San Fernando. Óleo de Antonio González Ruiz (1746).

2. ASTRONOMÍA ESFÉRICA



Las cuestiones astronómicas fueron abordadas por Benito Bails, principalmente en dos de sus obras: *Elementos de Matemática*³² y *Principios de Matemática*³³; recogiendo en el frontispicio de ambas los méritos del autor, *Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia y de la de Ciencias naturales de Barcelona*. El volumen exclusivamente dedicado a la Astronomía, incluido en los *Elementos de Matemática*, fue póstumo, de ahí que la Academia de San Fernando decidiera conservar el prólogo que había escrito Bails para el tercer tomo de sus *Principios de Matemática*. En él se constata la especial atención que prestaba a aquella rama de la ciencia: “...aunque de igual utilidad todos los asuntos de esta obra, es sin duda la Astronomía el de mayor elevación”. Seguidamente reproducía algunos de los comentarios efectuados por Bailly en su *Historia de la Astronomía*³⁴. He aquí algunos de los elegidos:

“La Astronomía nacida en los campos y entre pastores, ha pasado de los hombres más sencillos a los entendimientos más sublimes. Grandiosa por la inmensidad de su objeto, curiosa por sus medios de investigación, portentosa por el número y la especie de sus descubrimientos, es tal vez la medida de la inteligencia del hombre, y la prueba de lo que puede con el tiempo y el ingenio”.

Refiriéndose a la necesidad de la instrucción pública, añadía Bails este otro comentario: “...y las bibliotecas antiguas perecieron, a veces aniquiladas por la superstición, muchas veces disipadas por la ignorancia, cuyo genio es dejarlo todo perecer, porque nada mira con interés, por lo mismo que nada mira con conocimiento”.

Bails abordó también otras cuestiones astronómicas en el tomo VIII de sus *Elementos de Matemática*³⁵, póstumo como el anterior. Con él puede decirse, en cierto modo, que se adelantó a su tiempo, por haber dado al capítulo correspondiente el título de *Elementos de Astronomía Física*. Este nuevo tomo fue prologado institucionalmente por la Academia de San

³² Esta obra constó de diez tomos y once volúmenes (1775-1804), dedicándose el séptimo exclusivamente a la Astronomía.

³³ *Principios de Matemática*, donde se enseña la Especulativa, con su aplicación a la Dinámica, Hidrodinámica, Óptica, Astronomía, Geografía, Gnomónica, Arquitectura, Perspectiva y al Calendario. Tres tomos (1776).

³⁴ Un libro que formaba parte de su biblioteca y que ya fue citado con anterioridad.

³⁵ El índice de este volumen incluye además de los temas relacionados con la Astronomía Física, otros de Cronología, Geodesia, Metrología y Cartografía, así como de Perspectiva y *Elementos de Música Especulativa*.

Fernando, concediendo a la Astronomía un papel muy destacable en la formación científica: “Si la Astronomía es la ciencia en que más resplandece la sagacidad del entendimiento humano, por la naturaleza de los descubrimientos que ha hecho sobre unos cuerpos tan apartados de nuestra habitación, es también la que exige para su cabal inteligencia conocimientos muy extensos de Dinámica, Óptica, Geometría, y sobre todo de los cálculos diferencial e integral, que tanto ejercicio han dado y dan a los Matemáticos de primer orden”.

De la erudición del prologuista da fe su comentario a propósito de la precesión equinoccial, un problema complicado que es analizada con gran detalle en este volumen: “D’Alembert tiene la gloria de haber sido el primero que ha emprendido la solución rigurosa del difícil problema de la precesión de los equinoccios, que no es otra cosa que una cuestión de Dinámica que se puede proponer en los términos siguientes: *Determinar el movimiento de todas y cada una de las partes de un cuerpo que ha recibido una impresión cualquiera en uno, o varios de sus puntos, y cuyas partes gravitan varios centros móviles*”.

Más adelante insiste en la clara interconexión entre las Ciencias Exactas y la Astronomía, sin olvidarse de los astrólogos: “La importancia y necesidad de la Astronomía, que unos creen ser una ciencia de mero lujo, cuando otros por una vergonzosa ignorancia la confunden con la Astrología, se acreditan por lo mucho que con sus aplicaciones contribuye a la felicidad pública, y por la dependencia que de ella tiene la Cronología, la Geografía y Gnomónica, cuyos fundamentos se explican en este libro, bien que no son los únicos ramos dependientes de la Astronomía”.

Siguiendo la filosofía de los Principios de Matemática, incluyó los correspondientes a la astronomía en el segundo tomo de la obra. El estado del conocimiento de España, en el último tercio del siglo XVIII, aún permanecía anclado a la tradición tolemaica, de manera que el sistema copernicano era, para muchos sectores de la sociedad, del todo condenable por ir en contras de las Sagradas Escrituras y de la doctrina oficial de la iglesia. Con semejante panorama ha de valorarse la talla intelectual de Bails al terminar el prólogo, de este volumen, con estas palabras:

“Antes de concluir esta breve noticia no podemos dejar de prevenir que incluye este Tomo una novedad *que acaso dará que decir a muchos*, y es

que en los Principios de Astronomía demostramos el Sistema Copernicano o la opinión del movimiento de la tierra. Una vez que la tenemos por verdadera, y es su objeto un punto de filosofía natural, no cabía en nuestra franqueza disimularlo; y una vez que los demostramos, nos asiste el derecho de pedir *que antes de abominar de este sistema se pesen las razones en que le fundamos*”³⁶.

Más adelante recordaba que la supuesta prohibición ya no estaba vigente, pues incluso se había borrado del “Índice del Expurgatorio”, y se había autorizado la reciente (1774) publicación de Jorge Juan sobre el estado de la astronomía en Europa, abrazando en ella el modelo heliocéntrico.

Principios de Astronomía

El texto dedicado a este capítulo se desarrolló entre las páginas 289 y 510, bajo 61 epígrafes; en el presente contexto solo destacaremos aquellos dedicados a la geometría de la esfera celeste, a las coordenadas geográficas y astronómicas, a las estrellas y a las constelaciones, al Sol y a sus movimientos, al tiempo y a su medida, así como a las correcciones astronómicas. Mención aparte merecen los comentarios, que realizó Bails, sobre el Sistema del Mundo, haciendo especial hincapié en los argumentos “con que en otros tiempos se impugnó el Sistema Copernicano” y en como podían explicarse con él todos los fenómenos celestes³⁷. No obstante, también puede considerarse astronómico el capítulo con el que concluyó este segundo tomo, ya que se centró en los Principios del Calendario. Sus catorce epígrafes se desarrollaron entre las páginas 511 y 550, analizando con detalle las reformas introducidas por el gregoriano y su incidencia sobre el cálculo de las treinta epactas³⁸. Para Benito Bails el objeto de la astronomía era averiguar los movimientos actuales, pasados o venideros de los cuerpos celestes, las circunstancias que los acompañan, y los fenómenos o apariencias que de ellos resultan. Dos fueron las clases de

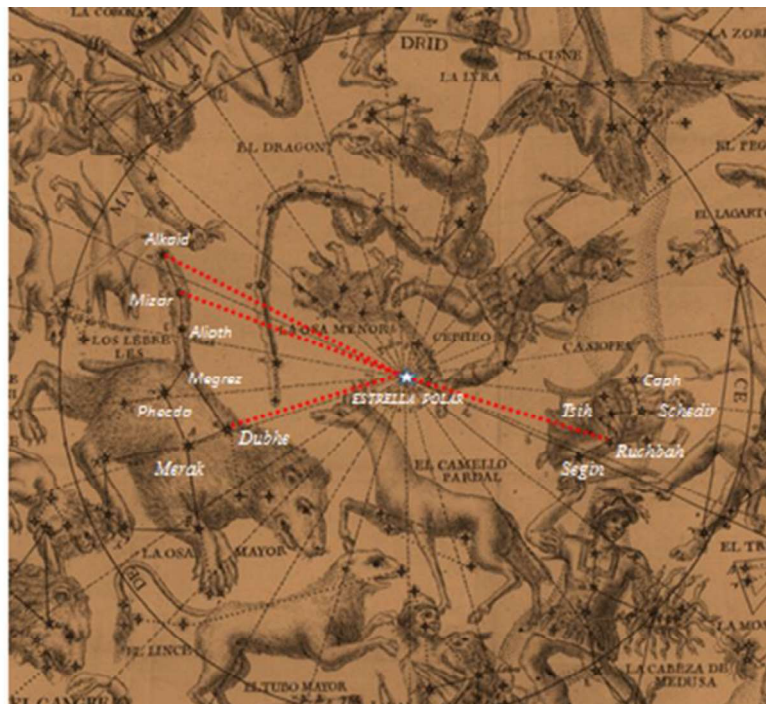
³⁶ Los subrayados son míos.

³⁷ Además de los referidos, figuraron otros que podrían englobarse bajo la denominada astronomía planetaria, incluyendo en ella el estudio detallado de la Luna y apuntes de mecánica celeste. Asimismo se dedicaron seis epígrafes al análisis de los eclipses: de Sol, de la Luna y de los satélites de Júpiter.

³⁸ Fue el segundo canon impuesto por el Nuevo calendario del papa Gregorio XIII : *Epacta nihil aliud est quam numerus dierum quibus annus solaris communis dierum 365 annum communem lunarem dierum 354 superat*. (No es nada más que el número de días que un año solar común de 365 días excede al año lunar de 354 días). La epacta se utiliza para el cálculo de la fecha de Pascua, es decir el domingo siguiente a la primera Luna llena que sigue al equinoccio de primavera.

astros que contempló en su exposición³⁹, las estrellas fijas⁴⁰ y los planetas, que dividió en principales y secundarios o satélites.

El tratamiento que hizo Bails de la geometría celeste, tuvo en cuenta los enfoques convencionales: el de la gravitación universal, el de la rotación de la Tierra en torno a su eje y el de la traslación terrestre alrededor del Sol; atendiendo a ellos, se identificaron los planos, líneas y puntos asociados a los mismos. El primero de esos dos movimientos fue explicado por medio del relativo correspondiente, sufrido diariamente por las estrellas y llamado por eso diurno, al ser 24 horas su periodo de revolución aproximado. Bails definió el horizonte como “el ámbito del cielo que reparamos alrededor de nosotros, y limita la vista por todos lados, cuando estamos en un sitio elevado”. Ese círculo está contenido en el plano horizontal que divide la esfera en dos partes: el hemisferio visible y el invisible.



Localización de la estrella polar a partir de la constelación de la Osa Mayor y de la Casiopea. Fragmento de la carta del cielo boreal incluida por Joseph Garriga en su Uranografía (1793).

³⁹ Siguiendo los patrones de su tiempo, las explicaciones que aportó fueron demasiado literarias comparadas con las actuales, en las que muchas veces se abusa de la abstracción.

⁴⁰ Llamadas así “porque no se percibe variación alguna en la distancia que hay entre ellas”. Hoy día se mantiene esa denominación, más por inercia que por las evidencias que proporciona la observación. En efecto, a raíz de que se estudiasen las fotografías del cielo en diferentes épocas, se constató la existencia del movimiento propio de las estrellas, cuya principal manifestación será una variación del aspecto de las constelaciones con el tiempo.

Comentaba luego como las circunferencias descritas por los astros eran de un radio tal que iba disminuyendo a medida que se alejaban del horizonte, llegando a confundirse con un punto, al que llamó el polo del mundo. Tal como indicaba Bails, muy próximo a él se hallaba la estrella polar, básica para materializar una de las direcciones cardinales. Siendo plenamente consciente de su importancia, detalló la manera de localizarla apoyándose en la constelación de la Osa Mayor: “aquel conjunto de estrellas que el vulgo llama el carro”. El procedimiento que eligió fue el de prolongar la línea formada por las dos más distantes de la cola, esto es Merak (β) y Dubhe (α), y señalar el punto que equidista de la primera de ellas y de Alkaid (η), la estrella que marca el extremo de la cola⁴¹.

Conocida la posición del polo del mundo resultaban inmediatos los cuatro puntos cardinales y por tanto las cuatro direcciones correspondientes. Así se refería a ellos: El Norte, o septentrión, es el lado al cual estamos de cara cuando se mira el polo, el Sur, o mediodía, es el lado opuesto, aquel donde vemos el Sol a la mitad del día; el oriente, o el Este, y el poniente, u Oeste, están entre los dos puntos del Norte y del Sur, ..., el uno del lado que nacen los astros, y el otro del lado de que se ponen. Acto seguido definió otros puntos singulares: Cenit y Nadir, intersección de la vertical física con la esfera celeste, que Bails describía así: “el cenit es el punto que está directamente encima de nuestra cabeza, al cual va a parar el plomo si le concebimos prolongado hasta la concavidad del cielo...el nadir es el punto inferior de la esfera celeste, diametralmente opuesto al cenit, aquel punto al cual se dirige el plomo con su gravedad natural”. A todos los círculos máximos que pasaban por ambos puntos los denominó círculos verticales, pudiendo por tanto calcular la altura sobre el horizonte, de cualquier estrella, como el arco de su círculo vertical, comprendido entre ella y el horizonte; un ángulo complementario de sus distancia cenital, es decir del arco del mismo círculo que la une con el cenit.

Análogamente a como asoció el nadir y el cenit, hizo con los dos polos del mundo: el boreal y el meridional, o bien el septentrional y el austral, identificando a la línea que los unía con el eje del mundo. Bails continuó su exposición geométrica relacionando entre sí a los puntos ya referidos, al mencionar por primera vez el meridiano del lugar como “un círculo

⁴¹ En la actualidad es más frecuente prolongar cinco veces ese lado del carro ($\beta\alpha$). Otra alternativa es suponer que la estrella polar es el punto medio de la línea formada por la estrella Mizar de la Osa Mayor y la Ruchbah de la Casiopea.

máximo que pasaba por el cenit y los polos del mundo”; obviamente el plano de dicho meridiano sería el formado por la vertical física y el eje del mundo, de ahí que también se pueda definir como el círculo vertical del polo. El meridiano juega en la astronomía esférica un papel decisivo, tal como reconocía Bails: “el meridiano divide el cielo en dos hemisferios que están uno al oriente, el otro al poniente,..., llamase meridiano este círculo porque cuando el Sol llega a alcanzarle estamos a mitad del día. Por él pasan también todos los demás astros”. Sorprende un tanto que en ese momento se dejase llevar por su formación francesa y recurriera al meridiano de París para señalar que el observador que se desplaza por la superficie terrestre hacia el Este o hacia el Oeste cambiaba de meridiano, concluyendo, por el contrario, que “un observador que va en derechura hacia el Norte o al Sur no mudaba de meridiano”.

Al igual que estableció una cierta analogía entre la vertical física y el eje del mundo, también lo hizo entre el horizonte y el ecuador, al ser este el plano perpendicular a tal eje y que pasa por el centro de la esfera celeste⁴². Bails resumió perfectamente la importancia de los tres círculos máximos que había contemplado hasta entonces: horizonte, meridiano y ecuador, pues a ellos “se refieren todos los astros que se observan”. La primera medición astronómica planteada en estas lecciones fue la de la altura estelar, recurriendo para ello a un instrumento tan simple y práctico como un cuarto de círculo, llamado también cuadrante. Para facilitar más su comprensión incluyó una ilustración en la que situaba un lado del sector circular sobre el horizonte y otro sobre el vertical, tal como aparecen en la figura adjunta⁴³. De manera que si se quisiera obtener la altura de la estrella localizada en A, se identificaría, al observarla desde O, el punto C del cuadrante que se correspondiera con aquel, “y el número de grados que hubiese en la parte CD del instrumento, será el mismo que habrá en la porción AR de la esfera celeste”, siendo esa precisamente la altura deseada. Sin embargo, los astrónomos procedían de una forma ligeramente diferente, tal como apuntaba Bails; el cual deducía sin dificultad que el arco BE coincidía con el BC, o distancia cenital, marcando el punto E la dirección del ecuador. De igual modo, los arcos EG y AR serían también idénticos a la altura de la estrella sobre el horizonte. Bails resumía bien el proceso a

⁴² Bails suponía que la esfera de la que hablaba era geocéntrica, esto es que su centro lo era también de la Tierra. Cuando no coinciden cambia la denominación de la esfera: topocéntrica si el centro se encuentra sobre la superficie terrestre y heliocéntrica si el centro coincide con el del Sol.

⁴³ En todo semejante a la que Bails identificó con el número 275.

seguir: “para observar la altura de un astro no hay más que dirigir uno de los lados BO del cuadrante BEG hacia el astro supuesto en A, y ver cuantos grados intercepta, contando desde el otro radio OG del instrumento, el plomo ZOEN colgado en el centro O del instrumento, esto es, el arco GE.

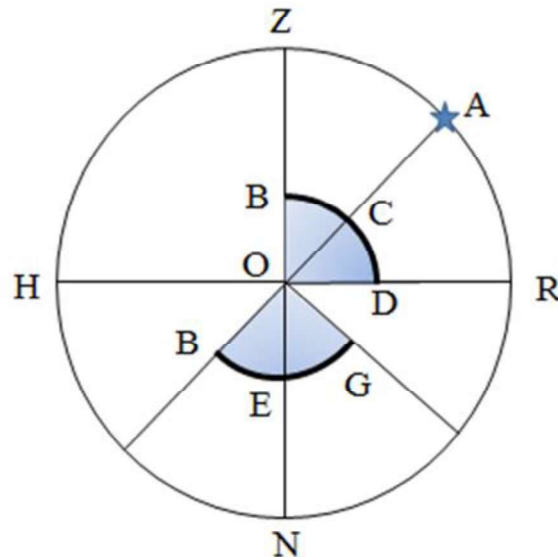


Figura análoga a la número 275, incluida por Bails para explicar la medida de alturas sobre el horizonte y de distancias cenitales, por medio del cuadrante.

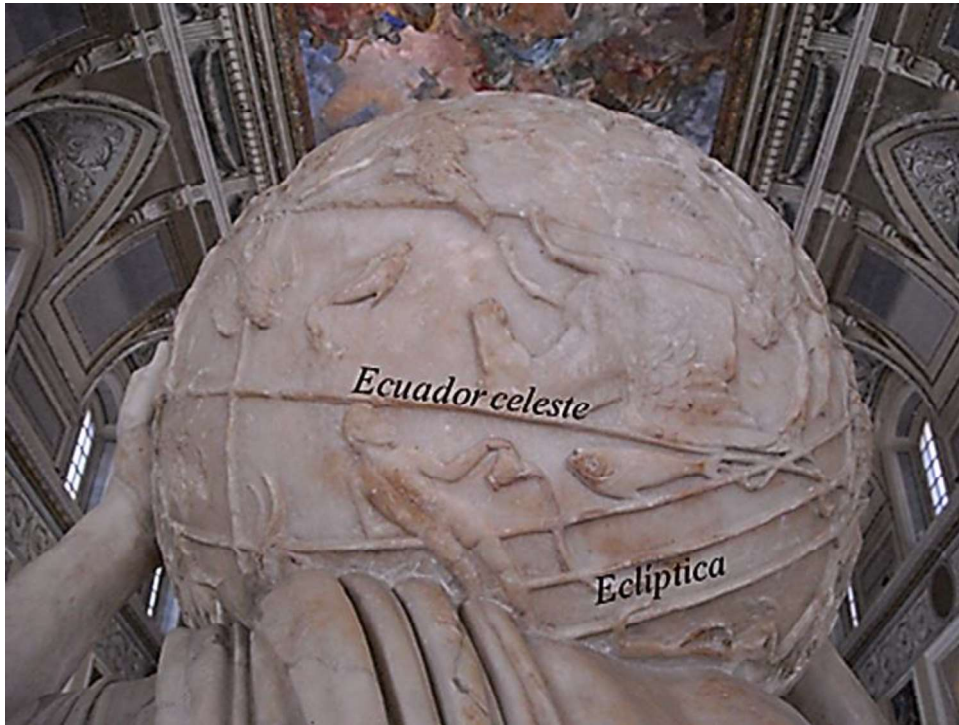
Ya que la esfera gira en torno al eje del mundo, también lo harán los puntos del ecuador al describir su círculo máximo en 24 horas. Ese movimiento relativo, correspondiente a la rotación diaria de la Tierra, se manifiesta igualmente en todas las estrellas, con la salvedad de que se moverán, en planos paralelos al ecuador, según círculos menores, como indicaba Bails, llamados por ello paralelos celestes, con un radio “tanto menor cuanto el punto está más inmediato al polo”. A todos esos paralelos los divide el meridiano en dos partes iguales, de modo que cada estrella “estará tanto tiempo a la izquierda como a la derecha del meridiano, cuyo círculo dividirá en dos partes iguales el tiempo que dura su revolución”. Los pasos de la estrella, en su trayectoria aparente sobre la bóveda celeste, por el meridiano fueron llamados por Bails, superior e inferior; en el primero de ellos su altura sobre el horizonte sería máxima, como en el segundo sería mínima. Se terminaba este apartado recordando que cuando el plano del paralelo, en el que descansa la estrella, cortaba al horizonte, “se la verá pasar dos veces al día por el meridiano”, con un intervalo de 12 horas. En caso contrario solo se vería la estrella durante parte de su revolución diaria.

La definición de los otros elementos geométricos de la esfera obligó a que Bails abordase la traslación de la Tierra alrededor del Sol, aunque, como en el caso de la rotación, lo hiciese indirectamente, a través del movimiento relativo correspondiente. Bails lo llamaba movimiento anuo, periódico o propio; señalando que “de él pendía la variedad de las estaciones, los calores del estío y los rigores del invierno, como también la diferencia que en el discurso del año experimentamos en los días y noches, que son más largas en una estación que en otra”. Incidía después en un fenómeno astronómico singular que debió sorprender a los primeros astrónomos y que no es más que otra manifestación de la traslación terrestre. Este fue el comentario de Bails: “porque si reparamos que todas las estrellas nacen y se ponen cada día en unos mismos puntos del horizonte, estando siempre a una misma distancia unas de otras, siendo así que el Sol nace y se pone en cada día en diferentes puntos del horizonte...no podemos menos de conocer que el Sol habrá mudado de lugar respecto de la estrella y se le habrá arrimado⁴⁴”.

La trayectoria del Sol es ciertamente compleja, por un lado está sometido al movimiento diurno, como cualquier estrella, y por otro al movimiento anual; en el primer caso su periodo es de 24 horas y en el segundo próximo a los 365 días, Bails lo sintetizaba con claridad: “el Sol da cada día una revolución alrededor de nosotros, pero al mismo tiempo anda un grado, con corta diferencia⁴⁵, en dirección contraria, o de occidente a oriente, y corresponde a diferentes puntos del cielo”. Necesariamente se refirió inmediatamente después al plano de la eclíptica y más concretamente a su intersección con la esfera celeste: “el círculo llamado eclíptica”. Un camino aparente diferente del ecuador, siendo uno y otro dos de las líneas más representadas en la iconografía astronómica. Recordaba igualmente como desde tiempos muy pretéritos se sabía que los dos círculos se cortaban dos veces al año, en primavera y en otoño: “de donde resultaba que aquellos dos días el Sol estaba en el mismo ecuador, del cual tres meses antes se había apartado 24° los días de los solsticios...y como estas dos distancias son iguales, se sigue que la eclíptica es un círculo máximo de la esfera”.

⁴⁴ Actualmente se conoce este fenómeno con el nombre de aceleración de las fijas, pues parece como si acelerasen su movimiento entre un día y el siguiente, ya que para una fecha dada se produce su culminación casi cuatro minutos antes que la de la fecha inmediatamente anterior; una cantidad que coincide exactamente con la variación diaria de la ascensión recta del Sol, a la que nos referiremos más adelante.

⁴⁵ En realidad giraría 360° en poco más de 365 días, es decir que en un día recorrerá menos de un grado.



El ecuador celeste y la eclíptica en el Atlas de Farnese. Atlas soporta sobre su espalda un globo celeste, de 65 cm de diámetro, en el que se representan las antiguas constelaciones y la banda zodiacal. La escultura, de 2m de altura, no es el original, sino una copia romana de la misma realizada en el siglo II. En cualquier caso se trata del globo más pretérito del que se tiene constancia.

Las dos intersecciones anteriores están separadas seis meses una de la otra, aunque en ambas “anda el Sol el ecuador, está 12 horas sobre el horizonte y 12 horas debajo, y los días son iguales con las noches”; de ahí que se les conozca asimismo como días equinocciales. Bails definió los solsticios como puntos de la eclíptica situados entre los equinoccios, en los cuales se hallaba el Sol cuando estaba más distante del ecuador celeste; su denominación obedeció a que llegado el Sol a tales puntos “parece que se mantiene inmóvil algunos días”. En ese apartado de su discurso anunció incluso el valor de la oblicuidad de la eclíptica⁴⁶, ya que refiriéndose a ese círculo máximo, comentó: “...y sabemos que si en otros tiempos se apartaba 24° del ecuador, no se apartaba hoy más que 23° ½ al Norte y al Sur”, añadiendo que “esta oblicuidad es en estos tiempos de 23° 28’20’’ y mengua como 1’ en 200 años”. También refirió los dos coluros: equinoccial

⁴⁶ Ángulo formado por los planos de la eclíptica y del ecuador. En la actualidad se estima su valor en torno a los 23°26’, decreciendo 46.8’’ cada siglo. Así continuará haciéndolo durante milenios, hasta alcanzar los 22° 6’ en que volverá a aumentar, pudiendo llegar como máximo a los 24° 30’ (Teoría de Milankovitch).

y solsticial, círculos máximos que, pasando por los dos polos del mundo, contenían a los equinoccios o a los solsticios.

Para referirse a la coordenada astronómica de la declinación, recordaba como el Sol parecía que en cada día, por su movimiento diurno, distaba del ecuador tanto como el punto de la eclíptica en que se encontraba. De ahí que se llamase a tales paralelos círculos de igual declinación, o simplemente círculos de declinación; se colige por tanto que el valor extremo de esa coordenada será de $23^{\circ} \frac{1}{2}$, denominándose trópico al círculo correspondiente. Bails aclaraba que “hay un trópico de cada lado del ecuador; el uno se llama *trópico de cáncer*, porque el Sol le anda el día del solsticio de verano, cuando entra en un grupo de estrellas llamado el *signo de cáncer*; el otro se llama *trópico de capricornio*, porque el Sol le anda el día en que entra en un grupo de estrellas llamado el *signo de capricornio*. Por consiguiente los dos trópicos abrazan todo el espacio donde puede hallarse el Sol, cuyo espacio coge 47° ”.

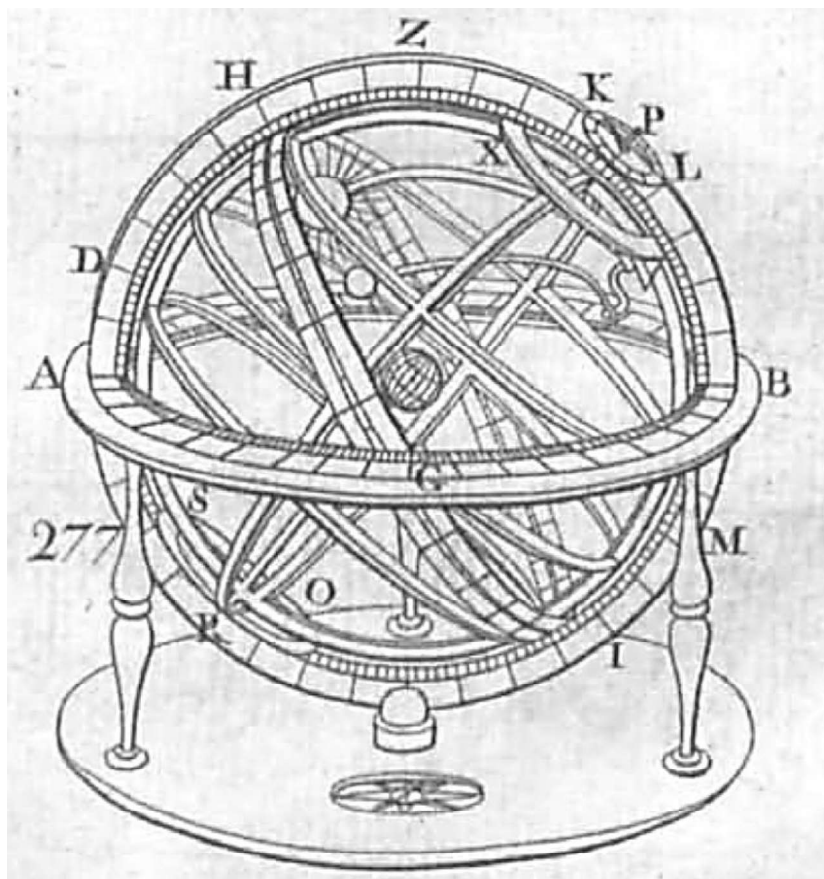


Ilustración de la esfera armilar (figura 277) incluida por Benito Bails, bajo el epígrafe De los Círculos de la Esfera.

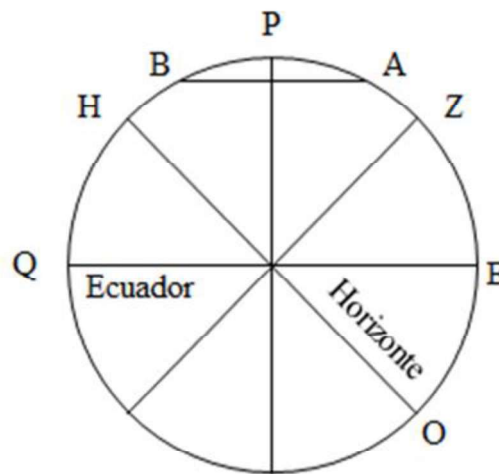
Haciendo gala de su espíritu didáctico, Bails describió a continuación la esfera armilar, ya que en ella se materializaban todos los círculos a los que se había venido refiriendo. La etimología de la palabra armilar, quedó también justificada, en tanto que “cada círculo parece un collar o sortija, y la voz latina *armilla*⁴⁷ significa lo mismo”. Para entenderla mejor, ilustró sus comentarios con una cuidadosa representación en perspectiva, que se reproduce a continuación, facilitando así la completa descripción que realizó de la misma. De ella es subrayable su referencia la cinturón zodiacal: “el zodiaco es una banda celeste HI que tiene 16° de ancho, es a saber, 8° de cada lado de la eclíptica; no se hace memoria de este círculo en la Astronomía, solo sirve para representar el espacio de donde no pasan los planetas, que en sus movimientos alrededor del Sol se apartan como unos 8° de la eclíptica”. También fue destacable el remate superior de la misma, la muestra KL dividida en 24^h, la cual permitía “resolver sin cálculo ninguno algunas cuestiones de Astronomía”.

La primera aplicación que hizo Bails de las alturas estelares sobre el horizonte fue para explicar cómo podría obtenerse la del polo, por medio de las estrellas circumpolares, identificadas así por su localización sobre la esfera celeste. Para ello insistía en la interdependencia de los tres círculos máximos que venía comentando: ecuador, horizonte y meridiano, y en su trascendencia para la mayoría de las cuestiones de la astronómica de posición. Una vez definida la latitud del lugar como la altura del polo sobre el horizonte, suponía que debía comprenderse como los astrónomos antiguos pudiesen calcular esa coordenada geográfica con relativa facilidad, pues como él mismo decía. “si la estrella polar estuviera puntualmente en el mismo polo del mundo, bastaría medir su altura y quedaría averiguada la altura del polo”. Ahora bien, como la estrella polar no coincidía exactamente con el polo hubo que recurrir a un artificio que solventase el problema.

La solución la proporcionaría la observación consecutiva de los pasos de la estrella por el meridiano, ya que al ser ambos puntos equidistantes del polo, resultaba evidente que su altura sobre el horizonte sería necesariamente la semisuma de los valores determinados en uno y otro. Bails lo explicaba de otro modo: “supongamos ahora que se haya observado la altura de la estrella en A, y su altura en B; para hallar la altura del polo se deberá partir

⁴⁷ *Armillae*, ae: especie de brazaletes.

por medio la diferencia AB de las dos alturas; la mitad de esta diferencia será PB, que se añadirá a la altura mínima HB de la estrella, y la suma HP será la altura del polo”. Bails se refirió también a la colatitud, el ángulo complementario de la latitud, aunque la llamase altura del ecuador, para terminar afirmando que la altura del polo HP es el complemento de la altura del ecuador EO. Apoyándose en la figura a la que se remitió en el texto⁴⁸, repetía que la altura del ecuador es igual a la distancia del polo al cenit, esto es al arco PZ. Poco más adelante concluía que la distancia ZE del cenit al ecuador era también igual a la altura del polo⁴⁹: “porque ZH es de 90° igualmente que PE; si restamos de cada una la parte común PZ, los arcos residuos PH y ZE serán iguales”.



Sección meridional de la esfera celeste. AB es la representación del paralelo descrito por la estrella polar. A es el paso superior por el meridiano y B el inferior. La altura del Polo sería por tanto la semisuma de las presentadas por la estrella en los dos puntos anteriores.

La práctica del procedimiento anterior sería inviable sin conocer la posición previa del meridiano o sin saber a ciencia cierta la hora en que la estrella polar se hallaba en esas posiciones tan singulares. Se entiende pues que Bails dedicase los siguientes comentarios al trazado de la línea meridiana, la cual no es más que la intersección del meridiano del lugar con el plano del horizonte. La materialización de esa dirección cardinal fue uno de los replanteos más antiguos jamás realizado por el hombre, no en vano se tuvo que usar al construir la gran pirámide de Egipto y orientar su base

⁴⁸ Semejante a la que aquí se presenta.

⁴⁹ Actualmente suele definirse la latitud como el ángulo que forma la vertical física con el plano del ecuador.

cuadrada. Como quiera que las trayectorias aparentes de las estrellas son divididas por el meridiano en dos partes iguales, es normal que se quisiera aprovechar esa propiedad para efectuar esta operación astronómica, con una fuerte componente topográfica.

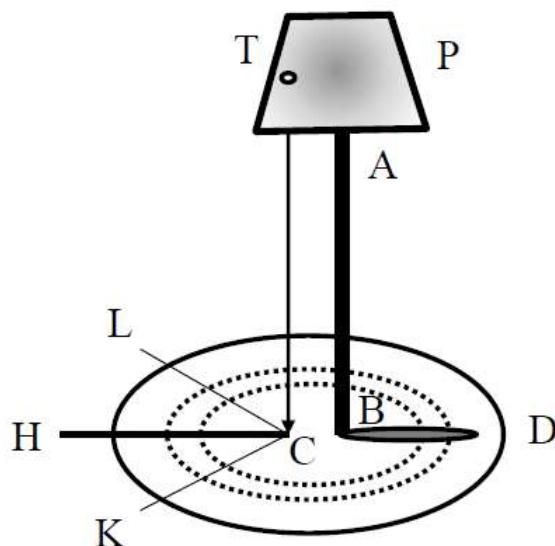
En efecto, sabido que el Sol a mediodía pasa por el meridiano y que en tal instante alcanzaba su máxima altura, se trataba de fijarlo en el espacio y en el tiempo. La primera posibilidad se lograba al señalar la dirección de la sombra más corta arrojada por un estilo vertical, colocado sobre una plataforma horizontal y de horizonte bien despejado. Sin embargo el procedimiento requería ciertas modificaciones, que Bails daba a entender: “este método es poco exacto, porque no es posible conocer con bastante precisión el instante de la altura máxima, al acercarse al medio día, y cuando la altura está para llegar a su máximo, crece con tanta lentitud, que queda poca seguridad en la operación”.

El mismo se encargaba inmediatamente después de aclararlo, al indicar que el método se podría mejorar sensiblemente al materializar las sombras arrojadas por el Sol en dos momentos equidistantes del meridiano, es decir matutinos y vespertinos, tal como ocurría en sus ortos y ocasos. Ciertamente, cuando estuviesen trazadas sobre el terreno esas direcciones correspondientes⁵⁰, solo habría que determinar la bisectriz del ángulo formado por ellas y proceder al estaquillado de la misma. Bails daba otros detalles y modificaciones con los que poder lograr una mayor fiabilidad geométrica. Lo más sobresaliente de su exposición fue la descripción del reloj de Sol genérico que diseñó al efecto, y que según él era “un instrumento portátil y muy acomodado”. El elemento principal era una pequeña plataforma horizontal con una minúscula perforación (T) por la que entraría el rayo solar⁵¹. Dicha plataforma se apoyaba, mediante un soporte cilíndrico (AB) sobre una plancha mucho mayor, igualmente horizontal, sobre la que se proyectaba la luz del Sol. Asimismo indicaba el camino a seguir en el transcurso de la observación: “desde el punto C que corresponde perpendicularmente debajo del agujero, y le señala un plomo TC, se trazan muchos círculos concéntricos; en cada círculo se señala el

⁵⁰ En astronomía esférica se dice que dos posiciones de una estrella son correspondientes cuando equidistan del meridiano del lugar.

⁵¹ El instrumento fue representado en la figura número 279, con la que se acompañó el texto que lo describía, aunque aquí se ofrezca la versión digital de la misma.

punto luminoso de por la mañana K, y el de por la tarde L; el medio H del intervalo determina la meridiana CH”.



Reloj de Sol diseñado por Benito Bails, cuyo dibujo (figura n° 279) fue incluido en los Principios de Astronomía.

Expuestos los conceptos anteriores debía referirse a la medida del tiempo, para fijar el instante en que se producían los pasos de las estrellas por el meridiano, las salidas y las puestas del Sol, o cualquier otro fenómeno astronómico. Al tiempo ya se había referido Bails al comentar que el periodo del movimiento diurno era de 24^h. La escala parecía por tanto obligada, máxime cuando el movimiento de rotación de la Tierra se consideró uniforme hasta que se impusieron los avances espectaculares de la mecánica celeste⁵². La formación integral de la escala requería el establecimiento de la unidad de medida, eligiéndose precisamente el periodo ya citado de un día, con divisores como la hora, el minuto y el segundo, y múltiplos como el año, el mes o la semana. Otro elemento imprescindible para la medida del tiempo fue el origen de la escala. Al ser el Sol la estrella que regulaba la actividad cotidiana, fue normal que el origen estuviese ligado a su observación. Aunque en un principio se eligieran orígenes tan naturales como el orto u ocaso del Sol, con el

⁵² Aunque la falta de regularidad en la velocidad de rotación terrestre era ya conocida en la época de Bails, su plena constatación no se produjo hasta que se impuso el tiempo atómico en la segunda mitad del pasado siglo XX. Hoy día se admite que el día solar aumenta alrededor de dos milésimas de segundo cada cien años, debiéndole añadir una fluctuación irregular que se puede cifrar en un minuto para las últimas tres centurias.

desarrollo astronómico posterior se comprobó que tales instantes no eran los más adecuados.

Bails lo expresaba con toda claridad: “como el horizonte sensible donde el Sol nace y se pone, es un círculo muy irregular, lleno de vapores que oscurecen y desfiguran el Sol, y los días cuyos límites señala son muy desiguales, por estos motivos se ha tomado el meridiano por término de las revoluciones diurnas”. No obstante, el Sol presentaba ciertos inconvenientes que también fueron analizados: “ya repararon los antiguos astrónomos, después de observar muchos años de seguida el regreso del Sol al solsticio o al equinoccio, o su paso por el ecuador, que en 60 años de 365 días cada uno, el Sol no volvía al ecuador puntualmente, y que necesitaba 15 días más para hallarse en el mismo círculo. Infirieron de aquí, con perspicacia, que la revolución del Sol no era de 365 días cabales, sino de 365 días y 6 horas, esto es de $365 \frac{1}{4}$, o de 366 días cada cuatro años”. La conclusión resultaba inmediata: los 360° de su órbita aparente alrededor de la Tierra serían recorridos a razón de $59'8''$ cada día⁵³.



El triunfo del tiempo (Grabado de Silvestro Pomarede.1748). En la imagen aparecen personajes históricos y mitológicos, como Nestor y Ulises, Alejandro Magno, Aristóteles, Dario, Semíramis, Cleopatra, Zenobia, Hipatia y Saladino. El tiempo figura como un hombre alado que mide con un compás sobre un globo adornado con la banda zodiacal.

⁵³ Resultado de dividir los 21600 minutos sexagesimales por los 365.25 días del año, aunque el cociente real fuese $\approx 59'.1376$.

No obstante se descubrió pronto que ese *movimiento medio* era solo aparente: “quiero decir, que no se hallaba donde correspondía si anduviese 59’8’’ cada día, de donde resultaría que en unos tiempos del año andaba más que en otros. Con efecto, también enseña hoy día la observación que el *movimiento verdadero* de este astro no es igual a su movimiento medio, pues el día 1 de abril el Sol se halla donde debería estar el día 3, o dos días más tarde si hubiera caminado uniformemente en la eclíptica desde el día primero de Enero. Al contrario, a primeros de octubre el Sol está a la misma cantidad menos adelantada de lo que corresponde a su movimiento medio”. Bails se estaba refiriendo, sin mencionarla, a la segunda ley de Kepler. Puesto que de acuerdo con ella el Sol se desplaza más rápido cuando está más cerca de la Tierra, en el entorno del perigeo, que cuando está más lejos, en las proximidades del afelio.

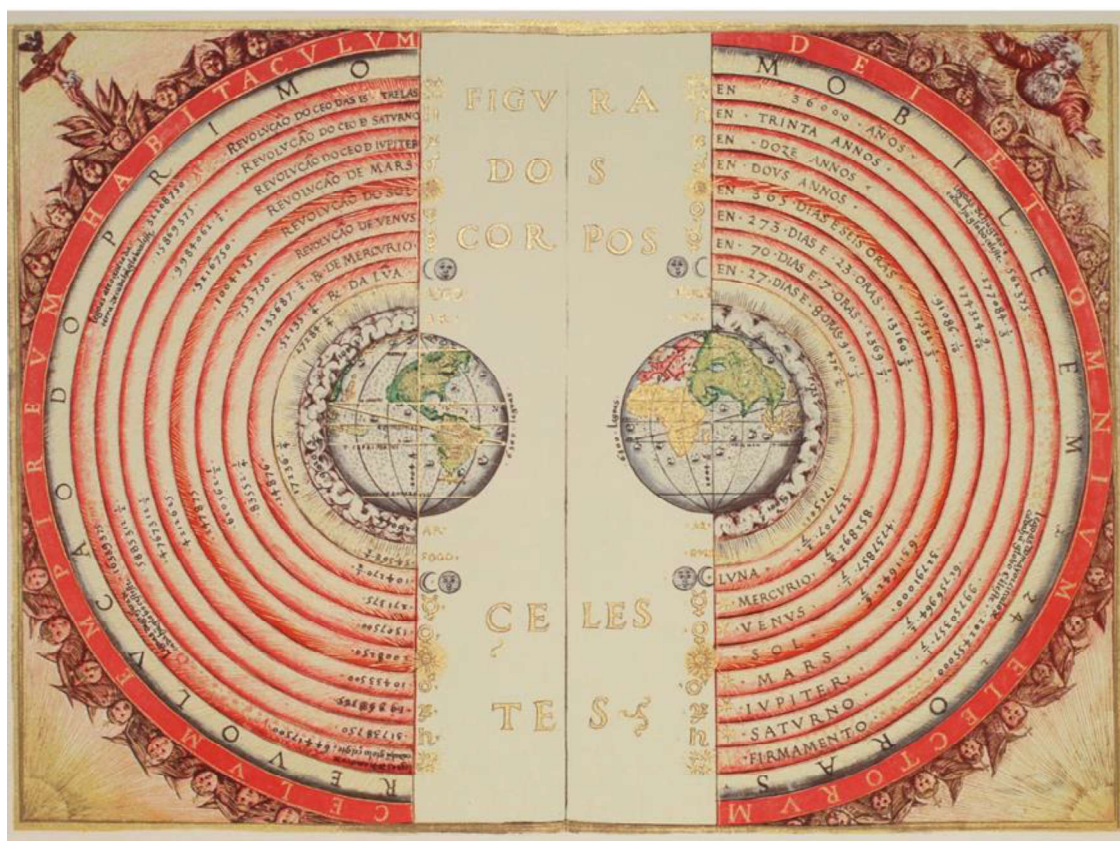
Dado que algunas coordenadas se expresaban indistintamente usando unidades angulares y temporales, Bails halló sus equivalencias antes de continuar con su exposición. Verificándose el giro completo de 360° en 24^h, resultaban inmediatas las relaciones siguientes: 15° = 1^h, 1° = 4^m, 1’ = 4^s, 1^m = 15’y 1^s = 15’’. Su último comentario “en general, con cuadruplicar los minutos de grado quedan convertidos en segundos de tiempo del *primer móvil*”, tiene que ser aclarado. En la actualidad, apenas se recuerda, incluso en el mundo instruido, que Bails se estaba refiriendo a la última esfera vacía del sistema geocéntrico de Tolomeo⁵⁴; aquella que con su movimiento arrastraba a la de las fijas y a las de todos los planetas localizados en otras concéntricas de menor radio.

Bails continuaba sus lecciones indicando que la diferencia sustancial entre el Sol y las demás estrellas era que el primero, además del movimiento diurno estaba animado de otro anual que lo separaba de ellas a razón de 59’8’’ cada día, añadiendo. “por consiguiente, cuando una estrella, que pasó por el meridiano a medio día con el Sol, parece que ha dado la vuelta al cielo, y ha vuelto al meridiano el día siguiente, el Sol no ha llegado todavía, porque en el intervalo de un medio día a otro ha caminado cerca de un grado a occidente”. Todo sucede como si la estrella se hubiese adelantado con relación al Sol, como si se hubiera acelerado, de ahí que se

⁵⁴ En la astronomía medieval y renacentista se creía que fuera de ella estaba el Empíreo, la "habitación de Dios y de todos sus elegidos". Para Dante, en cambio, se trataba de la penúltima esfera, de las diez que componían su paraíso.

conozca a ese fenómeno como aceleración de las fijas; una manifestación celeste de la traslación de la Tierra alrededor del Sol.

El efecto es obvio, la escala del tiempo de las estrellas, el tiempo sidéreo o sideral, difiere del tiempo solar, tal como indicaba Bails: “porque como el Sol es para nosotros el objeto más reparable, le tomamos por término de comparación; su regreso señala las 24^h, y decimos que las estrellas vuelven al meridiano en 23^h 56^m, siendo así que el Sol vuelve en 24^h”. Para medir uno y otro, se disponía en los observatorios astronómicos de distintos relojes. Bails pareció tomar partida por el tiempo sidéreo, cuando afirmaba que “el regreso de una estrella al meridiano sería una medida mucho más fija y más igual que el regreso del Sol, el regreso de la estrella nos manifiesta el movimiento cabal de la esfera, o del primer móvil, y la rotación completa de la Tierra”.



El modelo geocéntrico de Tolomeo, según el cartógrafo portugués Bartolomeu Velho (1568). Obsérvese que el “primo mobile” es envuelto por el “habitaculum Dei”.

La relación entre las dos clases de tiempo se facilitaba teniendo en cuenta que el desfase del Sol con relación a las estrellas se iba incrementando a lo largo del año: en tres meses sería de 6^h, en seis meses de 12^h, en nueve

meses de 18^h y en un año de 24^h. Esto es, en un año la diferencia entre el número de revoluciones efectuadas por las estrellas y por el Sol sería exactamente 1; dicho de otro modo, la equivalencia entre uno y otro tiempo vendría dada por la igualdad siguiente: $\Delta TS/\Delta TM = 366.25/365.25$, siendo ΔTS el intervalo de tiempo sidéreo y ΔTM el intervalo de tiempo medio. En definitiva, como muy bien indicaba Bails: “las horas solares son más largas que las horas del primer móvil, pues el Sol gasta 4^m más que una estrella para volver al meridiano...los relojes arreglados por las horas del primer móvil, que siguen el movimiento diurno de las estrellas, adelantan 3^m 56^s cada día a mediodía, respecto del movimiento medio del Sol, y nunca señalan la hora del Sol a excepción del día del equinoccio”.

Bails se centró seguidamente en la definición de las coordenadas geográficas, con las que se localiza cualquier punto de la superficie terrestre, localización que, al fin y al cabo, es el objetivo principal de esta parte de la astronomía, de ahí que se le conociera con el nombre de astronomía de posición. Bails trasladó previamente a la Tierra algunos de los elementos ya conocidos de la esfera celeste, como polos, ecuador, meridianos y paralelos. Los polos, Norte y Sur, de la Tierra eran homólogos a los celestes, por ser la intersección del eje del mundo con el globo terráqueo. Igual ocurría con el ecuador y los meridianos terrestres, que pertenecían al mismo plano que los celestes correspondientes. En los paralelos si se presentaba una cierta dificultad, pues aunque estuviesen contenidos en planos perpendiculares al eje del mundo, y ser por tanto paralelos al del ecuador, no guardaban tanta semejanza con los paralelos celestes o círculos de igual declinación⁵⁵. Aunque Bails ya se había referido a la latitud, al tratar de la altura del polo, retomó la cuestión al comentar que “a medida que nos vamos apartando del ecuador para ir hacia los polos, decimos que caminamos en latitud, a un grado de distancia del ecuador decimos que estamos a un grado de latitud”. Consiguientemente, definió esta coordenada como la distancia al ecuador: “medida hacia el Sur o hacia el Norte”; si el lugar considerado se sitúa en el hemisferio Norte se denomina latitud septentrional o boreal, en cambio para los puntos del otro hemisferio se llamaría latitud meridional o austral.

⁵⁵ No obstante, si se considerase el cono formado por el centro de la Tierra y un cierto paralelo celeste, su intersección con la superficie terrestre sería justamente un paralelo geográfico.

Para introducir el concepto de la longitud, consideró que debería existir otra coordenada con la que medir las distancias según la otra dirección cardinal (Este-Oeste): “las distancias contadas en esta última dirección se llaman longitudes, porque los países conocidos de los antiguos cogían más de largo de occidente a oriente que de Norte a Sur”. Bails no concretó en ese momento la unidad de medida, aunque diera a entender que serían grados ecuatoriales: “para medir las longitudes se conciben muchos círculos perpendiculares al ecuador, que pasan por los dos polos de la Tierra, y son los meridianos terrestres; todos los países que están sobre un mismo meridiano tienen una misma longitud⁵⁶”. Se refirió después a la interesante cuestión del meridiano origen, o primer meridiano, para recordar que fue Tolomeo quien eligió el de las Islas Canarias⁵⁷, decisión que sería refrendada muchos años después, el 1 de julio de 1634, por la pragmática francesa del rey Luis XIII, al localizarlo en el extremo más occidental de la isla de Hierro⁵⁸: “así, los franceses ponen su primer meridiano universal a 20° del meridiano de París, del lado de occidente, y prosiguen contando hacia el oriente hasta 360° dando la vuelta a la Tierra”.

Otra vez volvió Bails a sus orígenes académicos al ensalzar el marcado protagonismo de la ciencia francesa durante la Ilustración. En esta ocasión fue al subrayar, sin proponérselo, el fundamento de la determinación de las longitudes:

“los astrónomos franceses que suelen determinar las longitudes comparando las observaciones hechas en París con las que se hacen en otros países de la Tierra, tiene otro modo de contarlas. Cuentan no por grados sino por tiempo, la diferencia de los meridianos o diferencia de longitud entre París y los demás países; quince grados de longitud componen una hora, cada grado vale 4 minutos de tiempo; y en vez de decir, por ejemplo, que Poitiers está a 18° de longitud, porque esta ciudad

⁵⁶ A lo que cabría añadir como los situados sobre un mismo paralelo tienen igual latitud.

⁵⁷ La elección era del todo coherente, ya que de ese modo todo el mundo habitado, por entonces supuesto, tendría una longitud de igual signo. Téngase en cuenta que los países situados al Este del meridiano origen tienen longitud positiva (oriental) y los demás negativa (occidental).

⁵⁸ He aquí un resumen de su texto: “*Voulons que désormais ils aient à reconnaître...le dit premier méridien en l'isle de Fer comme la plus occidentale des dites isles et compter de là le premier degré des longitudes en tirant à l'Orient sans s'arrêter aux nouvelles intentions de ceux qui...l'ont placé aux Açores sur ce que ce lieu aucuns navigateurs auraient rapporté l'éguille n'avoir point de variation, étant certain qu'elle n'en a point en plusieurs autres endroits qui n'ont jamais été pris pour premier méridien...*”.

es 2º más occidental que París, dicen que la diferencia de los meridianos es de 8^m occidental”.



Medida de la distancia entre la Luna y las estrellas, uno de los muchos procedimientos para calcular la diferencia de longitudes entre el lugar de la observación y otro dado. Ilustración de Introductio Geographica Petri Apiani in Doctissimas vernerii Annotationes (1583). Petrus Apianus, 1533).

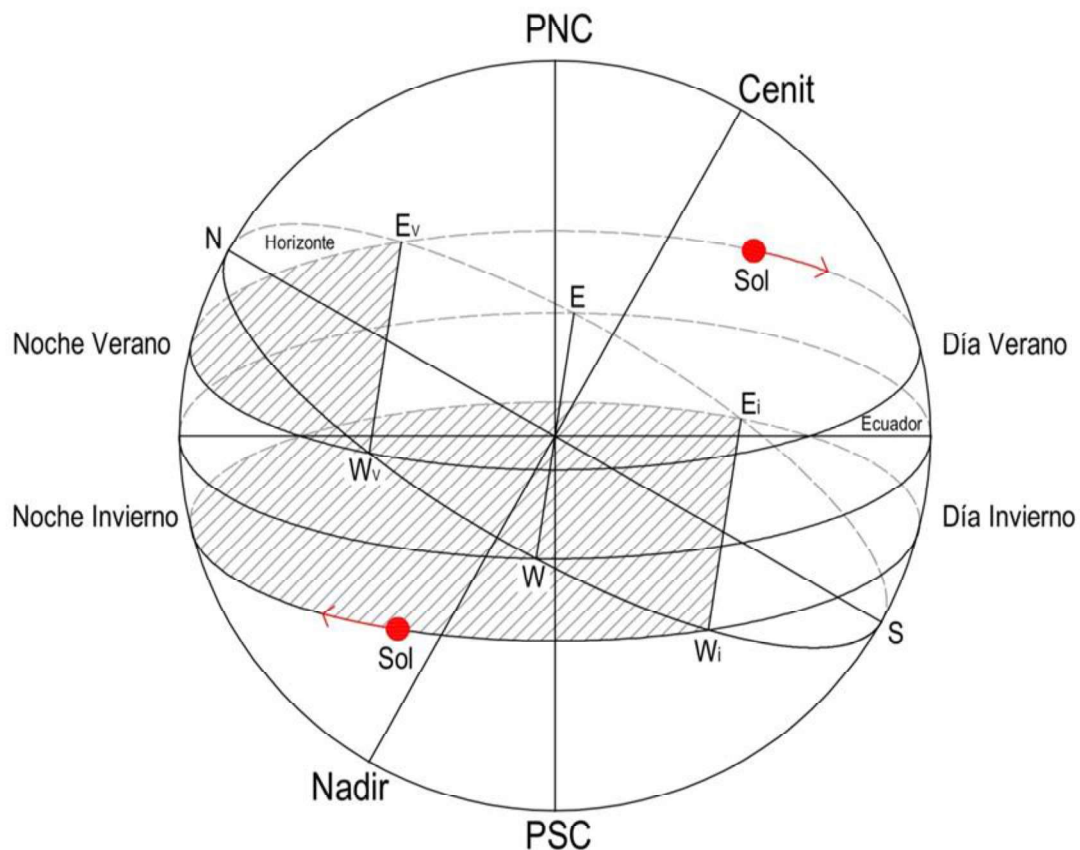
Bails insistía en esa medida temporal de la longitud, al equipar la diferencia de longitudes entre dos lugares dados con la diferencia de las horas locales respectivas. También recordó que “la determinación de las longitudes es un punto muy importante y dificultoso”, concretando entonces el fundamento de la misma: observar simultáneamente un mismo fenómeno astronómico desde dos lugares diferentes y restar las horas anotadas en cada uno de ellos. El ejemplo que puso no pudo ser otro que la posible observación, desde París y la Martinica, del comienzo de un eclipse de Luna: “si son las 12^h de la noche cuando el eclipse empieza en la Martinica, y se contaron en el mismo instante 4^h 13^m de madrugada de París, es constante que habrá 4^h 13^m de tiempo, o 63º 15’ de arco entre el meridiano de París y el de la Martinica”.

Bails complementó sus enseñanzas sobre la esfera celeste, estudiando su geometría en tres situaciones bien distintas: una para un lugar de latitud media y dos para latitudes muy singulares, el ecuador ($\varphi = 0^\circ$) y el polo Norte ($\varphi = 90^\circ$); sus denominaciones respectivas fueron las clásicas, esfera oblicua, recta y paralela. En el primer supuesto el ecuador es oblicuo con relación al horizonte, de ahí que fuese también conocida con ese nombre. Su principal característica es que la duración de los días es diferente a las de las noches, salvo en los equinoccios, como dejó dicho Bails. Para aclararlo incluyó una ilustración con una sección meridional de la esfera, en la que aparecían las trayectorias aparentes del Sol en su movimiento diurno; observándose como en el hemisferio Norte el Sol permanece por encima del horizonte más tiempo que debajo del mismo, durante el periodo comprendido entre el equinoccio de primavera y el de otoño, es decir que el día sería mayor que la noche. Todo lo contrario ocurriría para el mismo observador en el resto del año, en que el Sol estaría bajo el ecuador y recorriendo el espacio comprendido entre el equinoccio de otoño y el de primavera.

Bails resumió brillantemente la cuestión: “el arco diurno del trópico de cáncer es por lo mismo el mayor de todos los arcos diurnos del Sol respecto de los países septentrionales, porque entre todos los paralelos el trópico de cáncer es el más inmediato al polo. Esta es la razón porque el día más largo del año es el día que el Sol anda el trópico de cáncer, esto es, el día del solsticio de estío; por la misma razón la noche más larga de todo el año es la del solsticio de invierno”. A lo que convendría añadir la referencia de que en ella andaría el Sol por el trópico de capricornio, el más inmediato al polo Sur. Otra de las peculiaridades reseñada por el arquitecto estuvo relacionada con la aparente simetría de la trayectoria solar, con relación al coluro de los solsticios: “los días igualmente distantes de un mismo solsticio son iguales”.

También es digno de consignarse su comentario con respecto a los cambios de estaciones en los dos hemisferios: “dos países que están a latitudes iguales, el uno al Norte del ecuador, el otro al Sur, tienen estaciones siempre opuestas; la primavera del uno es el otoño del otro; el estío del primero es el invierno del segundo, porque los arcos diurnos del lado del Norte son iguales a los arcos nocturnos del lado del medio día, tomándolos en unos mismos días”. Analizado ya el movimiento diurno del Sol por la

esfera oblicua, se comprenderá mejor la división de la Tierra en zonas: la tórrida o ecuatorial, comprendida entre los dos trópicos, las dos zonas templadas limitadas por ellos y los círculos polares, así como las dos zonas glaciales coincidentes con los casquetes esféricos cuya base son los círculos anteriores, siendo los polos sus puntos culminantes. Las latitudes de los dos círculos polares fijadas por Bails fueron de $66^{\circ} 30' N$ y de $66^{\circ} 30' S$, ángulos complementarios de la oblicuidad de la eclíptica, que también citó en su momento.



Movimiento diurno y anual del Sol sobre la esfera oblicua. Los dos paralelos extremos coinciden con los trópicos de cáncer (el superior) y con el de capricornio (el inferior). El ancho de la banda ecuatorial por la que se desplaza el Sol es el doble de la oblicuidad de la eclíptica, alrededor de 47° .

En la esfera recta, en la que el hipotético observador se situaría sobre el ecuador, el cenit descansaría en el plano de este y el horizonte sería pues el meridiano del lugar, perpendicular por tanto al anterior. Quiere este decir que los dos polos se localizarían en el horizonte, dividiéndose desde allí todas las estrellas del firmamento. Por encima del horizonte estarían el mismo tiempo que debajo del mismo, 12^h : “por consiguiente todos los días son iguales unos con otros, y con las noches de todo el año”. Una

singularidad añadida es que el Sol iluminaría el fondo de los pozos dos veces al año, justamente en los dos días equinocciales; ese hecho de que el Sol pase por el cenit explica por sí mismo la denominación de tórrida para aquella zona y el hecho de que se considerase inhabitable durante tantos siglos.

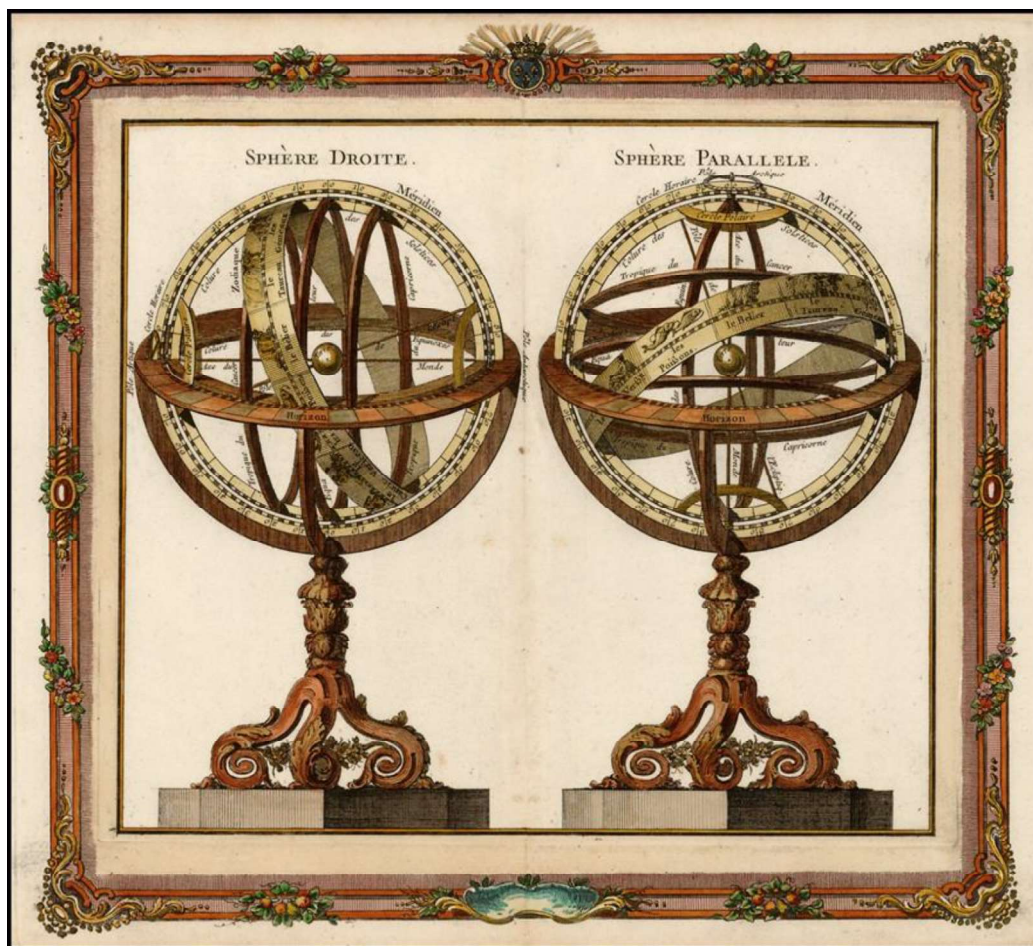
En la llamada esfera paralela, para una latitud de 90° , se debe suponer al observador situado en cualquiera de los dos polos terrestres. Es esta otra situación verdaderamente excepcional en la que dejan de tener sentido conceptos como el día o la noche. En efecto, al coincidir el plano del horizonte con el del ecuador (la vertical física sería idéntica al eje del mundo), las estrellas no cortarían al horizonte en su trayectoria diurna y se desplazarían manteniendo la misma altura. Sabiendo ya que el Sol está seis meses por encima del ecuador, con declinación positiva, y otros tantos debajo, con declinación negativa, es inmediato que en aquellos dos puntos el Sol ha de estar seis meses por encima del horizonte (será visible) y seis más debajo del mismo; de manera que todo ocurre como si el año solo tuviera un día de seis meses y una noche de igual duración. Otra peculiaridad relevante de los polos es que desde ellos solo se pueden contemplar las estrellas de su propio hemisferio, durante los seis meses en que la declinación del Sol es positiva (visibilidad en el polo Sur) y durante los otros seis en que es negativa (visibilidad en el polo Norte). La visión del Sol desde cualquiera de los dos polos ha de ser un fenómeno astronómico extraordinario, pues daría la vuelta completa sobre el horizonte manteniendo prácticamente⁵⁹ la misma altura.

Bails hizo, sin embargo, una matización importante al referirse a la oscuridad de seis meses. “hemos de exceptuar el crepúsculo que empieza 52 días antes que el Sol se deje ver sobre el horizonte, y acaba 53 días después de que el Sol desapareció totalmente”. Antes ya había efectuado otra que afecta sobremanera a todas las observaciones astronómicas, la refracción de la luz⁶⁰: “es causa esa refracción de que cuando el borde superior del Sol llega al horizonte, de modo que no hace más que empezar a dejarse ver, estando todavía debajo del horizonte el disco entero, la refracción hace que lo veamos todo entero, por manera que entonces su

⁵⁹ Recuérdese que tal como indicaba Bails, el intervalo angular de la declinación era de $-23^\circ 30' \leq 0^\circ \leq 23^\circ 30'$, es decir que en tres meses pasa de ser nula a ser máxima. En un mes variaría casi 8° , a razón de 15° diarios, una cantidad apenas perceptible.

⁶⁰ A ella se refirió con más detalle en otras partes de su obra astronómica, como tendremos ocasión de comprobar más adelante.

borde o limbo inferior toca el horizonte, y el efecto de la refracción es igual al diámetro del Sol”. Este capítulo dedicado a las tres esferas celestes, llevaba incorporado un curioso apéndice dedicado a los antípodas, prueba inequívoca de que aún perduraba en cierta medida la tradición secular que negaba su existencia⁶¹.



Esfera recta y paralela por Louis Brion de la Tour, ingeniero geógrafo del rey (París.1770).

El modelo heliocéntrico del universo propuesto por N. Copérnico también fue estudiado en profundidad por Benito Bails, hasta el punto de permitirle rebatir sin respuesta los argumentos falaces que todavía se defendían en su contra a finales del siglo XVIII. Buena prueba de ello fue lo que escribió, al

⁶¹ Lactancio, el Cicerón cristiano y preceptor de un hijo del emperador Constantino, ridiculizaba a los que osaban defender tal posibilidad.

respecto, el catedrático de matemáticas de la Universidad de Salamanca⁶² D. Torres de Villarroel⁶³:

“Nicolás Copérnico puso dos movimientos, el uno anuo, como si fuese uno de los Planetas, diciendo, que se movía alrededor del Sol por la Eclíptica, según el orden de los Signos, desde Aries a Tauro, cumpliendo su entera revolución en espacio de un año, conservando lo paralelo de su eje en cualquier grado de la Eclíptica; el otro movimiento, dijo, que era diurno movimiento sobre su centro, y con respecto a la Equinoccial, desde Poniente a Levante, en espacio de veinte y cuatro horas. No entra esa bola por el aro de mi credulidad”.

El extravagante personaje abrazaba la doctrina de la iglesia, cuando insistía en que las tesis copernicanas se podían admitir como simples hipótesis que explicaban los movimientos astrales: “...y en esta suposición se pueden admitir movimientos en este Globo, y de otra suerte es oponernos a muchos lugares de la Sagrada Escritura, donde claramente se prueba el movimiento del Sol y quietud de la Tierra, especialmente en el Libro de los Reyes, cap. 20. *Reversus est Sol decem lineis per gradus, quos descenderant*, y en el Eclesiast⁶⁴. Cap I. *Generatio praeterit: generatio abit: terra autem in aeternum stat*”.

Bails analizó con rigor el sistema planteado por el astrónomo polaco, para concluir afirmando que se satisfacían los principales argumentos con que se venía impugnando desde la publicación del *Revolutionibus* en el año 1543. Uno de los más conocidos ya lo había planteado en su tiempo el propio Aristóteles, al negar la rotación de la Tierra en torno a su eje, afirmando que si realmente girase al lanzar una piedra hacia arriba no le caería al propio sujeto, ya que mientras fuese cayendo la Tierra habría girado un tanto. Para rebatir ese reparo, comentaba Bails que todos los cuerpos terrestres, incluida la atmósfera, forman un todo con ella y “la Tierra gira con todo lo que es suyo, y todo pasa en la Tierra móvil del mismo modo que si no se moviese. Consta que si desde lo alto del mástil de un navío que

⁶² No obstante fue esta universidad una de las primeras en que se aceptó la lectura de la obra de Copérnico, así se contemplaba en sus estatutos de 1561.

⁶³ *Segunda Jornada. De la ínfima región de la Tierra, de la superficie del globo terráqueo, su estabilidad, situación y temperatura, y de la generación de los vegetales y animales*. Obras escogidas del Doctor D. Diego de Torres Villarroel (Tomo I), por J.F. Piferrer. (Barcelona.1808)

⁶⁴ Bails se refirió en su obra a ese texto del Eclesiastés, señalando que cuando en la biblia se hablaba del movimiento del Sol, “no debía suponerse que los escribas tratasen intrínsecamente de la cuestión física, y fundar o desterrar acerca de este punto alguna opinión”.

navega se deja caer una piedra, esta cae directamente al pie del mástil, del mismo modo que cuando está el navío en reposo...no es pues, de extrañar que los pájaros, las nubes, las balas⁶⁵ sigan el movimiento de la Tierra aun cuando se aparten de ella”.

Otras de las pretendidas justificaciones defendidas por los geocentristas, y contradichas después por Bails, pueden resultar en la actualidad un tanto zafias; estas fueron dos a las que se refirió en sus Principios de Astronomía: a) *repugna que la Tierra se trastorne cada día, y no es posible concebir que al cabo de doce horas estemos cabeza abajo o patas arriba*; b) *la Tierra es una mole pesada, vil y grosera, que parece dotada de poca aptitud para el movimiento, es un absurdo transformarla en un astro que se pasee por la concavidad del firmamento*. Bails refutaba la segunda prueba con una buena dosis de ironía: “convienen todos los astrónomos en que el Sol es mucho mayor que la Tierra. Luego si el Sol se mueve, según quieren los mismos que proponen ese argumento, con más facilidad se moverá la Tierra. Tampoco es la Tierra más grosera que los demás planetas, que son por la mayor parte tan grandes como la Tierra, sin que por eso se nos hagan increíbles sus movimientos”.

Bails tuvo también que tratar de la imposible conciliación entre el heliocentrismo y la biblia, guardando siempre el cuidadoso equilibrio que aconsejaba la omnipresente inquisición:

“sería temerario el que intentase excluir de los libros sagrados todas las metáforas, todas las comparaciones, todas las figuras recibidas entre los hombres...si Dios conversara con los hombres, diría lo mismo que Josué, y Josué no podía decir otra cosa, cuando mandó parar el Sol. Sería muy extraño pretender que un general de ejército, cual era Josué, se entretuviese en dar una lección de Astronomía, tratándose de manifestar a su ejército con una victoria la gloria y el poder de Dios, y dejando el lenguaje que sus soldados podían entender, mandase a la Tierra se parara”.

En esa misma línea manifestaba que los textos bíblicos que parecían oponerse al movimiento de la Tierra no debían entenderse literalmente “sino en el sentido común conforma hablan y relatan generalmente los hombres”. Con igual contundencia que valentía se expresaba Bails al referir

⁶⁵ Antes había indicado que “una bala de artillería arrojada perpendicularmente hacia arriba con suma precisión, caería puntualmente en la boca del cañón, bien que el tiempo que la bala estuviese en el aire, el cañón hubiese andado algunas leguas hacia el oriente”

la ignorancia astronómica de las primeras autoridades de la iglesia: “ni los autores sagrados, ni los Santos Padres, con cuya autoridad se pueden argüir en estos asuntos, sabían la Astronomía. Tal fue S. Agustín⁶⁶, una de las lumbreras de la Iglesia, que negaba los antípodas. *De Civit. Dei lib. 16, cap.9*”.



Portada de la Obra más conocida de Copérnico (De Revolutionibus orbium coelestium. 1543) y la imagen de tan novedoso sistema, que incluyó Andreas Cellarius en su Atlas Coelestis seu Harmonia macrocosmica.1660).

El capítulo dedicado a las correcciones astronómicas lo encabezó la refracción, que como apuntaba Bails curvaba⁶⁷ el rayo luminoso que

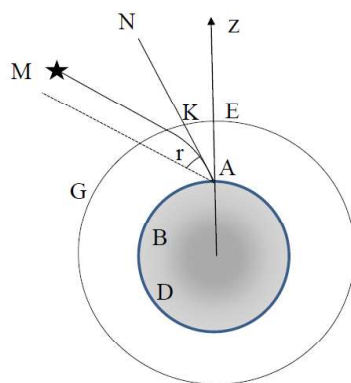
⁶⁶ *Quod uero et antipodas esse fabulantur, id est homines a contraria parte terrae, ubi sol oritur, quando occidit nobis, aduersa pedibus nostris calcare uestigia: nulla ratione credendum est. Neque hoc ulla historica cognitione didicisse se adfirmant, sed quasi ratiocinando coniectant, eo quod intra conuexa caeli terra suspensa sit, eundemque locum mundus habeat et infimum et medium; et ex hoc opinantur alteram terrae partem, quae infra est, habitatione hominum care re non posse. Nec adtendunt, etiamsi figura conglobata et rutunda mundus esse credatur siue aliqua ratione monstretur, non tamen esse consequens, ut etiam ex illa parte ab aquarum congerie nuda sit terra; deinde etiamsi nuda sit, neque hoc statim necesse esse, ut homines habeat (Pero sobre la fábula de que existen los Antípodas, es decir, hombres que viven en el lado opuesto de la tierra, donde el sol se levanta cuando para nosotros se pone, hombres que caminan con sus pies opuestos a los nuestros, eso no es creíble en modo alguno. Y, ciertamente, no se afirma que se haya aprendido tal cosa por conocimiento histórico, sino por conjetura científica, basándose en que la tierra está suspendida dentro de la concavidad del cielo, y que tiene tanto espacio en un lado como en el otro: por ello afirman que la parte bajo nosotros también debe de estar habitada. Pero no remarcan que, aunque se supone científicamente demostrado que el mundo tiene una forma esférica y redonda, de eso no se sigue que la otra cara de la tierra esté libre de agua; ni tampoco, aunque estuviera realmente libre de agua, se sigue que esté necesariamente habitada). Al no existir los antípodas San Agustín liberaba a los predicadores de llevar el evangelio a todos los habitantes de la Tierra, ya que en otro supuesto no se hubiese cumplir dicho mandato ecuménico, al no poder pasar por el ecuador, una barrera térmica infranqueable.*

⁶⁷ En condiciones normales, cuando la densidad de las capas atmosféricas decrece con la altitud, el rayo óptico presentaría la concavidad hacia la superficie terrestre. En el supuesto contrario se produciría el espejismo.

llegaba a la atmósfera de la Tierra y alcanzaba después al observador. La consecuencia es inmediata, el cuerpo celeste no se ve en su posición real sino más cerca del cenit, esto es, disminuyen las distancias cenitales de las estrellas o aumentan sus alturas sobre el horizonte; de manera que realizada la observación ha de corregirse su efecto para deducir la posición verdadera en función de la aparente. Su máximo valor se produce cuando el astro se encuentra en las proximidades del horizonte, ya se comentó que cuando el Sol se observa tangente al horizonte en realidad estaba debajo del mismo. Aunque Bails no lo comentara, otro de los efectos más singulares de la refracción es el achatamiento que presenta el disco solar en el momento del ocaso; el origen del mismo es que la refracción es menor en el borde superior del limbo que en el inferior, hasta el punto de que parece disminuir la longitud del diámetro en ese sentido.

Bails detallaba el fenómeno con una ilustración, semejante a la que se ha representado en la figura siguiente, donde la línea GKE se supone que es el borde superior de la atmósfera, MKA sería el arco luminoso que llega al observador localizado en A, sobre la superficie terrestre ABD. Al curvarse el rayo, a partir de los puntos K y A, el observador “refiere al rayo AKN el astro que está verdaderamente en M; por manera que la refracción es causa de que parezca el astro más alto la cantidad del ángulo NKM que se llama refracción astronómica”. Más adelante explicó asimismo un posible procedimiento para obtener el valor de dicho ángulo observando el Sol. Recurrió para ello al denominado triángulo de posición, formado por el cenit (Z), uno de los polos (P) y la proyección del Sol (S) sobre la esfera celeste. Mediante una de las fórmulas propias de la trigonometría esférica se calcularía el lado formado por el cenit y el Sol (ZS), a partir de tres de sus otros elementos⁶⁸: el lado PZ, la colatitud, el lado PS, complemento de la declinación o distancia polar, y el ángulo en el Polo, el cual dependería de la hora en que se efectuara la observación. A través del cálculo podría determinarse tanto el valor de ZS, la distancia cenital del Sol, como el de su complemento $90^\circ - ZS$, es decir la altura sobre el horizonte. El ángulo de refracción se podría obtener restándole al valor teórico obtenido la altura realmente observada, puesto que como indicaba Bails: “esta altura verdadera, que saca el cálculo, es siempre menor que la altura aparente observada con el cuadrante”.

⁶⁸ Bails daba por supuesto que sus valores eran independientes de la refracción.

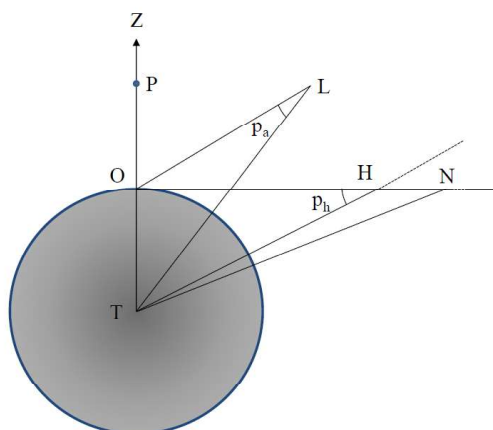


El ángulo de refracción (r). M es la posición verdadera de la estrella y N la aparente. GKE es el límite superior de la atmósfera y ABD la superficie terrestre.

La siguiente corrección que estudió Bails fue la de la paralaje, la cual aparece cuando se localiza un objeto a partir de dos puntos de vista; el ángulo de paralaje sería precisamente el que formarían las dos rectas indirectamente definidas. Por tanto, la paralaje es una manera de medir la distancia que separa el objeto de los puntos de vista. Se comprende que a medida que disminuya dicho ángulo aumente la distancia referida. En astronomía fueron clásicos los dos puntos de vistas siguientes: uno sobre la superficie topográfica de la Tierra y otro en su centro. Bails definió la paralaje diurna⁶⁹ como “la diferencia entre un lugar donde se ve un astro mirándole desde la superficie de la Tierra, y el lugar donde parecería si le mirásemos desde el centro de la Tierra”. Es obvio que también podría definirse esta paralaje astronómica como el ángulo bajo el que se vería el radio de la Tierra desde el astro en cuestión. Así se expresaba, más adelante, el mismo Bails al haberla definido también como “el ángulo que forman en el centro del astro dos rayos, de los cuales el uno va al centro de la Tierra, y el otro al punto de la superficie donde está el observador”. Conocida la paralaje podrían referirse a ese centro las observaciones topocéntricas, es decir las realizadas sobre la superficie topográfica: “es preciso trasladarse al centro, para verlo todo en su verdadero sitio, y averiguar la verdadera ley de los movimientos celestes”.

Paralajes diurnas, en altura (p_a) y horizontal (p_h). En función de ellas podrían calcularse las distancias desde la Tierra al planeta, situado en L o en H .

⁶⁹ Llamada así por estar asociada a la rotación diaria de la Tierra.



Paralajes diurnas, en altura (p_a) y horizontal (p_h). En función de ellas podrían calcularse las distancias desde la Tierra al planeta, situado en L o en H.

Como en el caso de la refracción, Bails se valió de una ilustración para fijar mejor estos conceptos. En ella figuraba la Tierra centrada en T, un punto (O) en su superficie y un planeta (P) que se supondría situado en posiciones diferentes. Si se localizase el planeta sobre la vertical de O, se proyectaría en un mismo punto del cielo al observarlo, tanto desde O como desde T; de ahí infería Bails que “un astro que parece al cenit no tiene paralaje”. Si en lugar de en la vertical se encontrase sobre el horizonte de O, las dos rectas, TH y OH, que localizarían el planeta “no corresponderían a un mismo punto del cielo, porque más allá del punto H donde se cruzan, se van apartando una de otra, irán a parar a distintos puntos del firmamento, y le señalarán al astro puesto en H dos situaciones diferentes, cuya diferencia es lo que propiamente llamamos paralaje”. En otros términos, el posicionamiento topocéntrico del planeta sería distinto de su homólogo geocéntrico. Por otra parte, resultaba inmediato, a la vista de la figura adjunta⁷⁰ que la distancia cenital aparente, o topocéntrica, ZOH es mayor que la verdadera, o geocéntrica, ZTH; la diferencia entre ambas es justamente el ángulo OHT, esto es el ángulo de paralaje, llamado también en este supuesto paralaje horizontal.

Bails continuó relacionando la distancia del astro a la Tierra, TH, con la paralaje anterior, apoyándose para ello en la trigonometría plana. En efecto, el seno del ángulo OHT sería igual al radio OT dividido por la distancia anterior, de manera que si p es el ángulo de paralaje, o simplemente

⁷⁰ Prácticamente idéntica a la que acompañó y dibujó Bails.

paralaje horizontal p_h , se tendría $\text{sen } p_h = R/TH$ o bien $TH = R/\text{sen } p_h$: “quiero decir, que el radio de la Tierra dividido por la distancia del astro expresa la paralaje⁷¹”. Recordaba Bails, que el triángulo TOH se denominaba paraláctico y que “siempre está en posición vertical, porque como el radio OT es una línea vertical, el plano del triángulo formado sobre OT no puede estar inclinado; luego la paralaje obra todo su efecto de arriba abajo en el plano de un círculo vertical, haciendo que los astros parezcan más bajos de lo que están, sin hacer que parezcan, ni más a la derecha ni más a la izquierda”.

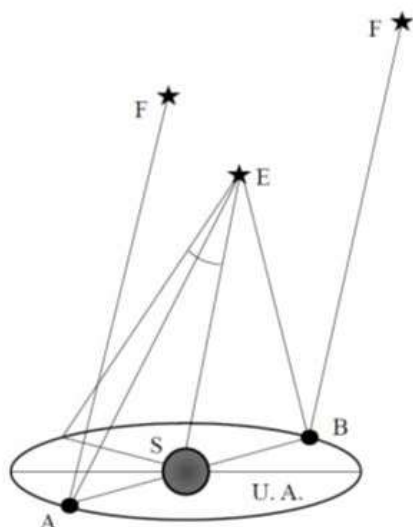
No obstante, la situación más general es aquella en la que la distancia cenital del planeta es menor de 90° , es decir cuando se encuentra por encima del horizonte y por tanto más cerca del cenit. Si L fuese la posición descrita, la paralaje se denominaría ahora paralaje de altura, p_a . Bails aplicó de nuevo la trigonometría, obteniendo para el triángulo OTL, la relación $(1/R) \text{sen } p_a = (1/TL) \text{sen } ZOL$. Ahora bien, como $TH = TL$ se verificaría que $TL = R/\text{sen } p_h$, con lo que se cumpliría la igualdad siguiente: $\text{sen } p_a = \text{sen } p_h \text{sen } ZOL$, equivalente⁷² a $\text{sen } p_a = \text{sen } p_h \cos a_L$; un resultado que Bails aclaraba así: “la paralaje de altura es igual a la paralaje horizontal multiplicada por el coseno de la altura aparente”.

Al igual que las observaciones astronómicas realizadas sobre la superficie de la Tierra había que reducirlas al centro de la misma, también se debía hacer lo propio con estas para reducirlas al Sol. Asociada a esa segunda reducción hay otra paralaje, que recibe el nombre de anual, en referencia al periodo de traslación terrestre. En este caso los dos puntos de vista serían la

⁷¹ Dado que las distancias planetarias son mucho mayores que el radio de la Tierra, los valores de la paralaje serán tan pequeños que el seno o la tangente del ángulo se pueden sustituir por el valor del mismo expresado en radianes. Si se usará como unidad lineal el radio de la Tierra, se podría obtener la distancia del planeta a la Tierra como el valor inverso de la paralaje. Bails se manifestaba en parecidos términos a propósito de la paralaje de la Luna: “la paralaje horizontal de la Luna que es la mayor de todas las paralajes de los planetas, no es más que de un grado, o allá se va, pero la diferencia entre el seno de un grado, y el arco de un grado es apenas de un cuarto de segundo, luego se puede tomar uno por otro”. Para tener una idea más cabal de los valores de la paralaje, indicaremos que la de la Luna oscila entre los $61'.4$ y los $54'$, mientras que la del Sol es del orden de $8''.8$. Tales valores nos permiten calcular aproximadamente las distancias de la Luna a la Tierra y al Sol, en el supuesto de que la Tierra fuese una esfera de radio 6371 km. Ciertamente, si $57'.7$ fuese la paralaje media de la Luna, resultaría que su distancia media a la Tierra podría cifrarse en torno a los 380000 km; en cambio para el Sol resultarían casi 150 millones de kilómetros. La fórmula empleada es muy simple: el desarrollo de un arco es igual al producto de su valor angular (en radianes) y del radio de la circunferencia a la que pertenece. De modo que ese radio sería el cociente del desarrollo y del ángulo: en los dos ejemplos el desarrollo coincidiría con el radio de la Tierra.

⁷² Téngase en cuenta que la distancia cenital y la altura sobre el horizonte son ángulos complementarios, con lo que el seno de uno coincide con el coseno del otro.

Tierra y el Sol, cuya distancia media es de unos 150 millones de kilómetros y se conoce con el nombre de Unidad Astronómica. Las estrellas están tan alejadas del sistema solar, que la mayoría no tiene paralaje, dicho de otra forma: el ángulo bajo el que se vería desde ellas el radio vector Sol-Tierra sería prácticamente despreciable. No debe sorprender por tanto que Bails subrayase en su obra que las estrellas fijas no tenían paralaje: “y así lo sienten hoy día los astrónomos de todas las naciones”. Hasta el segundo tercio del siglo siguiente no se consiguió matizar esa afirmación, al conseguir medir las distancias de las estrellas a través de su minúscula paralaje⁷³. Hoy día se sabe que la estrella menos alejada, y por tanto la de mayor paralaje⁷⁴, es la *Proxima Centauri (V645 Centauri)*, localizada en el hemisferio austral, muy cerca de la Cruz del Sur, y por tanto invisible para los observadores septentrionales.



Paralaje anual de la estrella E. Las posiciones de la Tierra en A y B están separadas seis meses. La paralaje anual de la estrella F es cero.

Sin embargo, Bails explicaba con mucho detalle el significado de esta nueva paralaje, que también llamaba “paralaje de la grande órbita”, con ilustraciones incluidas. Generalmente, cuando se observa una estrella desde la Tierra con un intervalo de seis meses, equivalente geoméricamente a su

⁷³ Los astrónomos pioneros fueron F. Bessel (1838) y W. von Struve (1840), quienes respectivamente obtuvieron las paralajes de la estrella 61 Cygni y α Lyrae. Las medidas de ambos, efectuadas en los Observatorios de Königsberg (actual Kaliningrado) y de Pulkovo (San Petersburgo), ampliaron considerablemente las fronteras de la astronomía, puesto que aparte de probar la traslación de la Tierra alrededor del Sol, demostraron que no todas las estrellas se hallaban a igual distancia de la Tierra y que la esfera de las fijas era solo producto de la imaginación.

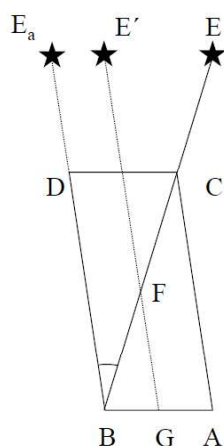
⁷⁴ En el año 2007 se fijó en $\approx 0''.755 \pm 0''.005$.

diámetro orbital, se proyectaría sobre el mismo punto del cielo. Tan solo en algunos casos lo hará en lugares distintos, justamente cuando se trate de las pocas estrellas con paralaje; realmente la paralaje anual sería el máximo valor del ángulo formado por la recta que une la estrella con el Sol y por el vector que localiza la Tierra en la mencionada órbita. Bails llegó incluso a comentar lo que después se conocería como parsec⁷⁵: “si la distancia SE de la estrella fija fuese doscientas mil veces mayor que la distancia SA del Sol a la Tierra, el ángulo AES será de 1’’”. También es destacable su comentario acerca de la posibilidad de establecer una escala de distancias astronómicas: “si la paralaje de las estrellas fuese reparable, nos proporcionaría determinar a qué distancia están de la Tierra”. Inmediatamente después concretó esa posibilidad, al afirmar que si la paralaje fuese de 1’’ la distancia de la estrella al Sol sería 206265 veces mayor que el radio de la órbita terrestre, el cual evaluó en 34 millones de leguas. Llegaba así a la conclusión de que una estrella con paralaje de 1’’ distaría de la Tierra 6771770 millones de leguas. Su último comentario en este apartado aclaraba que con telescopios, al uso, las imágenes de las estrellas siguen siendo puntuales: “por estar a tanta distancia de nosotros las estrellas, no es posible determinar su diámetro. No parecen sino como puntos tanto más chicos cuanto más perfectos son los anteojos con que las observamos”.

Bails demostró estar al tanto de los últimos avances en el campo de la astronomía, cuando trató con detalle, no exento de rigor, acerca de la aberración estelar; otra de las correcciones astronómicas que evidenciaba la traslación terrestre y cuya explicación fue dada por J. Bradley pocos años atrás (1728). El fenómeno fue descubierto en el transcurso de las investigaciones relacionadas con la determinación de las distancias de las estrellas, a través de sus paralajes. La aberración se debe al hecho de que la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol no es despreciable en comparación con la de la luz, tal como expuso Bails: “la aberración de las

⁷⁵ El parsec (*parallax of one arc second*) es la distancia a que se encuentra del Sol un punto en que se observa el radio de la órbita terrestre bajo un ángulo de un segundo. Su equivalencia en kilómetros se obtiene dividiendo la Unidad Astronómica por el segundo, expresado en radianes. De modo que si se supone que la primera es del orden de 150 E6 km, como los segundos de un radián son de aproximadamente 206265, resultaría que el parsec tendría 3.094 E 13 km. Esa unidad de medida se empleó en astronomía hasta que fue sustituida por el año luz, distancia recorrida por la luz en un año, a razón de unos 300000 km/s, es decir 300000(365)(24)(3600) km $\approx$ 9.461 E 12 km. Comparando las cantidades anteriores se deduce que el parsec coincide sensiblemente con 3.262 años luz. La estrella *Próxima Centauri* tiene una paralaje próxima a los 1.324 parsec, es decir que la estrella se encuentra a unos 4.319 años luz. A título de curiosidad añadido que la estrella polar se encuentra a unos 431 años luz.

estrellas es un movimiento aparente con el cual parece que andan elipses de 40'' de diámetro; proviene del movimiento de la luz, combinado con el movimiento anual de la Tierra".



Croquis que indica el fenómeno astronómico de la aberración estelar: Ea es la posición aparente de la estrella. El segmento AB es el que recorre la Tierra, mientras que la luz de la estrella llega desde C hasta B.

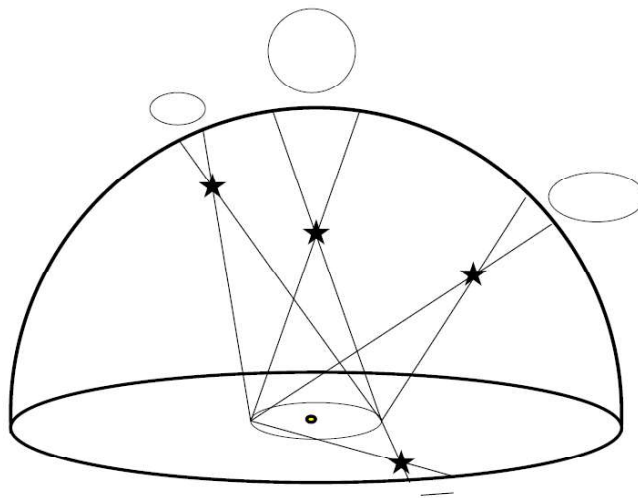
Para aclarar mejor la cuestión usó Bails el ya clásico paralelogramo, cuyos lados tenían longitudes proporcionales a tales velocidades, como bien subrayaba al final de su descripción:

“sea E una estrella que arroja hacia nosotros un rayo de luz, considerándole como un corpúsculo que va desde E a B, sea AB un arco muy chico de la órbita de la Tierra, que por lo que se verá dentro de poco supondremos de 20'', CB es el espacio que el rayo ha andado mientras que la Tierra andaba AB, luego el corpúsculo de luz estaba en C cuando la Tierra estaba en A, y llega al punto B en el mismo instante que la Tierra; con esto CB y AB expresan las velocidades de la luz y de la Tierra en 20'' de tiempo”.

La explicación parece todavía más clara cuando se tienen cuenta puntos intermedios del segmento CB, como F, y del AB, como G. En efecto, cuando la luz procedente de la estrella llegase a F, la Tierra habría avanzado hasta G y se vería a estrella en E'; es evidente por tanto que cuando el observador alcanzase el punto B vería la estrella en la posición E_a, manteniéndose el paralelismo de los tres segmentos: AC, GF y BD⁷⁶.

⁷⁶ Gauss instrumentalizó el experimento al suponer que el observador recibía la luz a través del anteojo AC, de modo que si al moverse no lo llevara paralelamente a la dirección BD, la luz caería fuera o

A consecuencia de la aberración, la estrella describiría en el cielo una elipse semejante a la que recorre la Tierra en un año, cuya excentricidad depende de sus coordenadas astronómicas. Esa posición aparente de la estrella la recogía Bails en estos términos: “el ángulo CBD se llama la aberración, es la cantidad o el ángulo CBD que una estrella parece que se aparta de su verdadero sitio, o de la línea BCE, de resultas del movimiento de la Tierra y del de la luz...al triángulo CBA que forma el camino de la luz con el de la Tierra, y cuyo angulillo C mide la aberración, se le llama triángulo de aberración”.



Elipses de aberración para estrellas localizadas en diferentes lugares de la esfera celeste. La elipse central representa la órbita terrestre en torno al Sol, la cual descansa sobre el plano de la eclíptica.

Más adelante se refirió, sin mencionarla como tal, a la constante de aberración, esto es al ángulo de aberración máximo, determinándola como la relación entre la velocidad de traslación terrestre, v , y la de la luz, c . El valor aproximado de la primera se deduce sin dificultad por medio de la fórmula $(2\pi \cdot 150 \text{ E}6 / 365) \text{ km/día} \approx 30 \text{ km/s}$. Como la velocidad de la luz es de unos 300000 km/s , la relación entre ambas será próxima a $1/10000$. Al estar expresado ese valor angular en radianes, habría que multiplicarlo por

chocaría contra el instrumento, pues tendría que haber penetrado por su extremo superior, C. La luz alcanzaría el punto F cuando el observador estuviese en G, para alcanzar inmediatamente el extremo inferior, B, en tal instante la posición ocupada por el anteojo sería la materializada por la recta BD. Obsérvese que esa dirección sería la prolongación del resultado de componer $BA = -vt$ con la prolongación de $CB = ct$, siendo t el tiempo invertido en recorrer los trayectos AB y CB, con las velocidades respectivas de v y c ; v es la velocidad lineal asociada a la traslación terrestre y c la velocidad de la luz.

206265 (los segundos del radian) para transformarlo en segundos sexagesimales, resultando así un valor redondeado de 20''.

Bails concretó la casuística de la aberración para estrellas situadas en diferentes lugares de la esfera celeste, señalando que su efecto más sensible se produciría cuando estuviesen localizadas en el mismo polo de la eclíptica, cuando “la estrella parecería andar un circulillo de 40'' de diámetro alrededor de su lugar verdadero, esto es alrededor del polo de la eclíptica”. Si la estrella estuviera entre ese polo y el plano de la eclíptica ese círculo aparente que describiría la estrella se transformaría en una elipse, cuya excentricidad se iría haciendo mayor a medida que se acercase a dicho plano, hasta el extremo de que la elipse sería solo un arco cuando la estrella descansara en el repetido plano de la eclíptica⁷⁷.

Bails terminó el análisis sobre las correcciones astronómicas refiriéndose a la precesión y a la nutación, ya comentadas a propósito de su biblioteca. La primera de ellas es conocida desde la antigüedad, gracias a la sagacidad del gran astrónomo y matemático Hiparco de Nicea. La segunda fue descubierta muchos siglos después, viviendo Bails, por el mismo astrónomo que lo hizo con la aberración de la luz, el inglés J. Bradley⁷⁸. La precesión prueba que la posición de los planos del ecuador y de la eclíptica no es inmutable, por la presencia de otros planetas y por los efectos de sus atracciones recíprocas. Por otra parte la Tierra no es esférica y la atracción luni-solar actúa de forma desigual sobre su abultamiento ecuatorial, imponiendo finalmente una especie de balanceo cuya principal manifestación es el giro del eje del mundo alrededor del eje polar de la eclíptica, traducido igualmente en un retroceso del punto Aries, el equinoccio de primavera, sobre la eclíptica, a razón de poco más de 50'' por año. En virtud de la nutación, el polo celeste describe en torno a su posición media una elipse, con diámetros próximos a los 18'' y a los 14'', en el transcurso de un año.

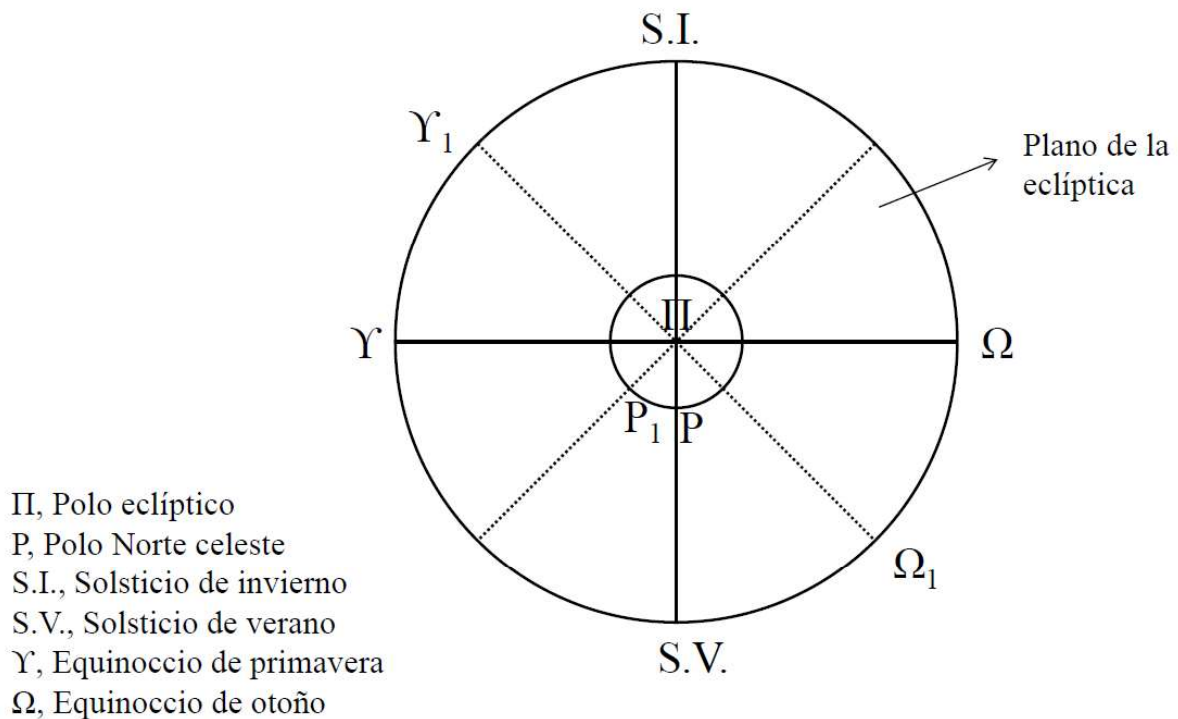
⁷⁷ Bails no se refirió a la aberración diurna, asociada a la velocidad de la rotación diaria de la Tierra. Su orden de magnitud sería bastante menor que la anual, en tanto que la velocidad terrestre sería en este caso $(2\pi.6371/24)$ km/h ≈ 463 m/s, con lo que el valor máximo de la constante de aberración sería de $1^{\circ}.544E-6 \approx 0''.32$.

⁷⁸ De él dijo J. Delambre, en su Historia de la Astronomía del siglo XVIII y cuando era director del Observatorio de París: “*C'est à ces découvertes de Bradley que nous devons l'exactitude de l'Astronomie moderne...Ce double service assure à son auteur la place la plus distinguée après celle d'Hipparque et de Képler, et au-dessus des plus grands astronomes de tous les âges et de tous les pays; ces travaux auraient suffi à sa gloire*”.

En la obra de Bails se dan detalles mucho más concretos sobre la precesión, al afirmar que comparando las medidas de las longitudes estelares⁷⁹ realizadas por Hiparco, en el año 140 a. C., con las modernas:

“se ha averiguado que han caminado en longitud $26^{\circ} 26'$ en el discurso de 1878 años, de modo que corresponden $50'' \frac{2}{3}$ de aumento cada año en la longitud de las estrellas...es indispensable que el punto del equinoccio desde el cual se cuentan estas longitudes, retroceda la misma cantidad; sucederá, pues, que el Sol llegará cada año a dicho punto antes que el año precedente, y esta es la razón de llamarse este fenómeno la precesión de los equinoccios”.

PROYECCIÓN ORTOGRÁFICA DE LA ESFERA CELESTE CENTRADA EN EL POLO ECLÍPTICO



Al girar el Polo Norte celeste desde P hasta P₁, el punto Aries Y haría lo propio hasta Y₁. La distancia angular media entre ambos polos coincide con la oblicuidad de la eclíptica ($\approx 23^{\circ} 26'$).

Sin embargo, Bails pretendió modificar ese valor de la precesión anual, al aceptar los cálculos efectuados por Lalande y fijarlo en $1^{\circ} 23' 10''$ por siglo. En ese caso disminuiría un tanto el periodo de revolución del polo

⁷⁹ Más adelante se definirá esta coordenada astronómica que, junto a la latitud eclíptica, fija la posición de una estrella sobre la esfera celeste, usando como plano fundamental el de la órbita terrestre.

Norte celeste alrededor de su homólogo de la eclíptica, hasta los 25972 años; un periodo al que Bails llamó año grande.

De nuevo ha de valorarse la actualidad de los conocimientos astronómicos de Bails, ya que desarrolló con amplitud las investigaciones que acababa de llevar a cabo Bradley y que desembocaron en el descubrimiento de la nutación. Bails definió ese fenómeno, al que también llamó desviación, como “un movimiento aparente de 9'' observado en las estrellas fijas, cuyo periodo es de 18 años”. Tras dar cuenta de las investigaciones anteriores repitió el modelo geométrico que propuso el astrónomo J. Machin, Secretario de la *Royal Society* de Londres, acompañando a su explicación de la nutación y de las variaciones de la precesión, “bastaba suponer que el polo de la Tierra trazaba un circulillo de 18'' de diámetro y que lo andaba en el discurso de la revolución que Bradley observó, y que era la de los nodos⁸⁰ de la Luna”.

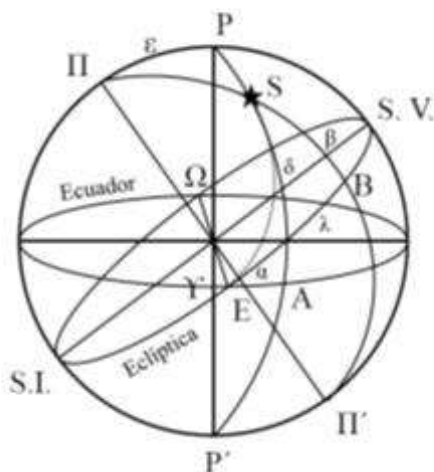
El apartado en el que se completó la relación de coordenadas astronómicas no fue suficientemente riguroso, ya que Bails no las definió en ocasiones con la concreción necesaria y se prestaban al equívoco. La ascensión recta, por ejemplo, la definió como “la distancia de la estrella al equinoccio contándola en el ecuador”, sin precisar el equinoccio origen y el sentido de la medida el arco, además de no indicar que la distancia realmente medida no era desde la misma estrella sino desde su proyección sobre el ecuador, a lo largo de su círculo horario. No obstante si señaló que la unidad empleada podría ser temporal o angular. Efectivamente, después de suponer una estrella imaginaria en el equinoccio, manifestaba que “entonces las estrellas que están 15° más al oriente que la primera estrella desde la cual se empieza, nacen una hora más tarde; y se dice que su diferencia de ascensión recta es de 15° o de una hora”. Igualmente hizo ver la importancia de esta coordenada para el cómputo del tiempo y el modo de obtenerla: “en conociendo la ascensión recta de una estrella o su distancia al equinoccio contándola a lo largo del ecuador, será muy fácil de determinar la de todas las demás estrellas, observando cuanto más tarde que la primera pasan por el meridiano”. Aunque ya había definido en otro momento la declinación de las estrellas, aprovechó esta ocasión para

⁸⁰ El plano de la órbita de la Luna corta al plano de la eclíptica en la llamada línea nodal, cuyos dos extremos son el nodo ascendente y el nodo descendente. En el primero la Luna atraviesa la eclíptica pasando de latitud negativa a positiva, al contrario de lo que sucede en el diametralmente opuesto. El Plano de la eclíptica debe su nombre a que en torno a él debe de situarse la Luna para que se produzcan eclipses.

calificarla en función de su posición. En las que “estaban más arriba del ecuador o del lado del Norte” la declinación sería boreal o septentrional, en cambio las estrellas del otro hemisferio tendrían declinación austral o meridional. Tampoco pareció Bails especialmente preciso cuando llamó círculos de declinación⁸¹ a todos los círculos que son perpendiculares al ecuador, pues acto seguido los identificó también con los círculos horarios.

Bails reconoció la antigüedad de las coordenadas eclípticas al introducir una de ellas, la longitud: “cuando referimos cada estrella al punto de la eclíptica al cual corresponde perpendicularmente, conforme lo estilan tiempos ha los astrónomos, llamamos longitudes estas distancias medidas a lo largo de la eclíptica, y se empiezan a contar desde el punto equinoccial”. En su definición si fue más concreto⁸², que en el caso de la ascensión recta, “luego la longitud de un astro es el arco o la distancia entre el equinoccio y el punto de la eclíptica, al cual corresponde perpendicularmente dicho astro”. La segunda coordenada de este grupo en ser definida fue la latitud, distancia de la estrella a la eclíptica medida sobre su meridiano. Aunque no lo citara, debe entenderse que, como sucedía con las declinaciones, contemplaba latitudes de dos tipos, según se encontrase la estrella a uno u otro lado del plano de la eclíptica.

COORDENADAS ECUATORIALES Y ECLÍPTICAS



El arco EA es la ascensión recta (α), AS es la declinación (δ), EB es la longitud (λ) y SB la latitud (β). El punto E coincide con el Punto Aries y ϵ es la oblicuidad de la eclíptica.

⁸¹ A pesar de que las declinaciones se midiesen a lo largo de los mismos.

⁸² Se supone que el equinoccio elegido era el de primavera y que la proyección sobre la eclíptica se efectuaba a lo largo del meridiano eclíptico de la estrella.

Bails informaba de que las coordenadas ecuatoriales eran las que solían determinarse a través de la observación: “las observaciones que hacen los astrónomos acerca de la posición de los astros, siempre se apunta por ascensión recta y declinación, por ser el ecuador y el meridiano círculos más familiares y constantes, y más fáciles de determinar, con lo que son las medidas más naturales, fáciles y puntuales”. No obstante subrayó que en el caso de los planetas se empleaban las coordenadas eclípticas: “la razón de esta práctica es muy natural, porque el Sol parece que se mueve en la eclíptica, y de este círculo distan también muy poco las órbitas de los planetas; sus desigualdades parecen menores, y de aquí también resulta más uniformidad, facilidad y brevedad en las tablas astronómicas”.

La relación entre las dos clases de coordenadas se obtuvo por vía trigonométrica, ya que las eclípticas son inobservables, tal como manifestaba Bails: “aunque en lugar de la ascensión recta averiguada, se toma su distancia al equinoccio más inmediato”. Su interés le llevó a indicar el camino a seguir, a través de una figura que aparece incluida en la que precede a estas líneas. Después de haber identificado cada una de las coordenadas con los arcos correspondientes, proseguía así:

“nos figuraremos un círculo máximo ES, que va desde el punto equinoccial a la estrella, para formar el triángulo esférico SEA, rectángulo en A, con la ascensión recta y la declinación del astro, y otro triángulo esférico SBE, rectángulo en B, con la latitud y la longitud del mismo astro. Resolveremos primero el triángulo SAE...y hallaremos el ángulo SESA y la hipotenusa SE. Por medio del ángulo SEA y del ángulo BEA, que es la oblicuidad de la eclíptica $23^{\circ} \frac{1}{2}$, formaremos el ángulo SEB, que será su diferencia, si el punto S y el punto B estuvieren ambos más altos o más bajos que el ecuador EA; al contrario, el ángulo SEB será la suma del ángulo SEA y de la oblicuidad de la eclíptica AEB, si el astro S y el punto B de la eclíptica que le corresponde, estuvieren uno al Norte y el otro al medio día del ecuador. Después de formado el ángulo SEB, servirá con la hipotenusa SE para determinar la longitud EB y la latitud BS de una estrella, refiriéndola a la eclíptica. Por este método se han formado los catálogos de estrellas, donde van señaladas las longitudes y latitudes de cada una en signos, grados, minutos y segundos”.

Aunque sea solo a título de curiosidad, se indican los posibles resultados que relacionarían los dos sistemas de coordenadas⁸³:

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} \lambda = (\cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon) / \cos \delta \cos \alpha$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon$$

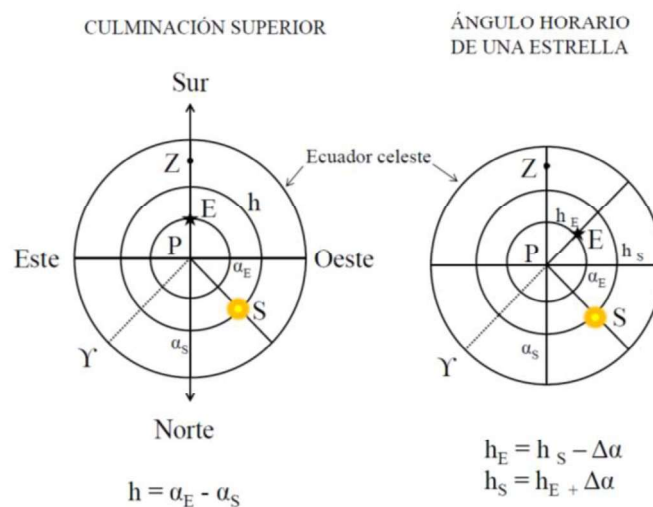
$$\operatorname{tg} \alpha = (\cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon) / \cos \beta \cos \lambda.$$

Bails se ocupó después de cuestiones propias de la astronomía práctica, tales como las culminaciones de las estrellas o del orto y ocaso de las mismas; en todos los supuestos se deberían de hallar las horas a que tenían lugar, completándose en los últimos con la localización sobre el horizonte de los puntos correspondientes. El estudio de las culminaciones resultaba muy pertinente, pues en tales instantes la visual a la estrella estaría contenida en el plano del meridiano y se facilitaría por lo tanto su replanteo. La hora solar verdadera a que tendrían lugar resultaba evidente, teniendo en cuenta la relación entre las ascensiones rectas del Sol y de la estrella. Bails lo explicaba con relativa facilidad, para la culminación superior, es decir para la que estaba más cerca del cenit: “el paso de una estrella por el meridiano se calcula por medio de su diferencia de ascensión recta entre el Sol y la estrella, con efecto, para averiguar a qué hora la estrella ha de pasar, basta saber cuánto tiempo pasó después del Sol, o qué exceso su ascensión recta lleva a la del Sol. Si este exceso fuere de 15° en el instante en que atraviesa el meridiano, es señal de que es una hora de tiempo verdadero, que el Sol pasó por el meridiano una hora antes, esto es, que la estrella pasa a la una”. Procediendo así con todas las estrellas visibles de un cierto catálogo, pudieron obtenerse las horas solicitadas para cada una de ellas y en cualquier fecha.

En la figura adjunta, se representa una proyección ortográfica de la esfera celeste centrada en el polo Norte, con las trayectorias aparentes del Sol y de la estrella, además de la traza del meridiano del lugar. Al contarse las ascensiones rectas desde el punto Aries, en sentido directo, es obvio que el

⁸³ Realmente los resultados obtenidos fueron ligeramente diferentes de los aquí presentados, ya que se transformaban las fórmulas obtenidas para que solo contuviesen productos o sumas y se pudiesen calcular aplicando logaritmos (Téngase en cuenta que ese fue el más poderoso instrumento de cálculo hasta que aparecieron en el mercado las primeras calculadoras electrónicas).

ángulo horario del Sol⁸⁴ en el momento de la culminación sería el incremento de las ascensiones rectas, como bien aseguraba Bails. Incluso calculó, como ejemplo, la hora en que culminó la estrella Vega⁸⁵, en la constelación de la Lira, el día 1 de mayo de 1760. Como su ascensión recta fue de $277^{\circ} 12' 17''$ y la del Sol para ese mismo día⁸⁶ resultó ser de $2^{\text{h}} 36^{\text{m}} 9^{\text{s}}$, se obtuvo sin mayor esfuerzo que la diferencia entre ambas fue de $15^{\text{h}} 52^{\text{m}} 40^{\text{s}}$, aunque Bails lo redondease a $15^{\text{h}} 53^{\text{m}}$, una vez transformado el valor de la primera en $18^{\text{h}} 28^{\text{m}} 49^{\text{s}}$.



Proyecciones ortográficas de la esfera celeste sobre el plano del ecuador.

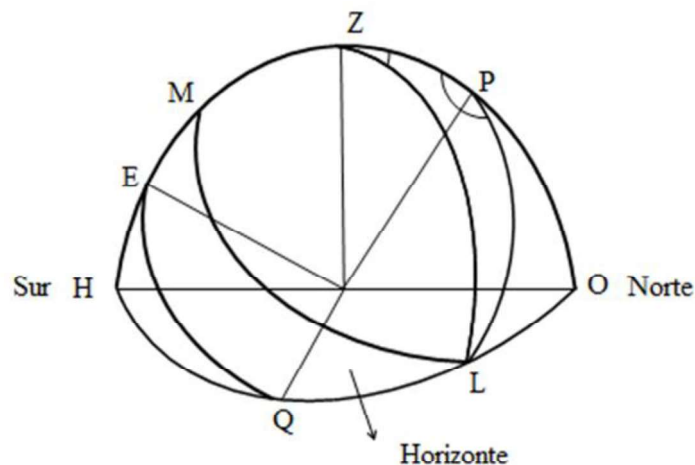
Bails hizo a continuación una importante salvedad, que venía a reconocer la transcendencia del tiempo y la dificultad que entrañaba su medida: “ esto sería verdad si todos estos tiempos fuesen tiempos solares verdaderos, pero

⁸⁴ El ángulo horario de una estrella es una coordenada astronómica de la familia de las ecuatoriales. Se define como el ángulo entre el círculo horario de la estrella y el meridiano del lugar (círculo horario del cenit), contado en sentido horario y a partir del meridiano superior (la parte que contiene al cenit). Esta coordenada varía pues con el lugar y con el tiempo, aunque de manera uniforme. La hora solar verdadera se puede hacer coincidir con el ángulo horario del Sol, en cuyo caso habría que comentar si se trata de la mañana o de la tarde: la culminación superior se produciría a las 0^h y la inferior a las 12^h, el primer instante marcaría el mediodía y el segundo la medianoche. En cambio si la hora solar verdadera se definiera como 12^h más el ángulo horario, se produciría la culminación superior a las 12^h y la inferior a las 24^h, sin necesidad de precisar si se trata de hora matutina o vespertina. Esta segunda opción parece la más racional, pues no tiene mucho sentido que después de las 12^h venga la 1^h en lugar de las 13^h, con la necesidad añadida de tener que indicar si se trata del mediodía o de la madrugada.

⁸⁵ Su denominación formal es α Lyr. Es la más brillante del hemisferio Norte después de Arturo (en la constelación del Boyero).

como este tiempo solar es muy desigual en diferentes meses del año, se convierten las ascensiones rectas en tiempo del primer móvil...Hay una diferencia de algunos minutos, pero se simplifica la operación con calcular la diferencia de las ascensiones rectas para la hora misma en que la estrella está en el meridiano, conforme lo hemos propuesto”. Después generalizó la cuestión anterior para poder hallar el ángulo horario de la estrella, en un cualquier momento, como diferencia entre el ángulo horario del Sol y el incremento de las ascensiones rectas del Sol y de la misma estrella.

El cálculo de las horas a que se producen los ortos y ocasos lo realizó Bails apoyándose en el denominado arco semidiurno, esto es el ángulo horario de la estrella cuando se encuentra en el horizonte. Para ello identificó los elementos geométricos de la esfera celeste que intervenían en la resolución del problema, marcados sobre una figura análoga a la que aquí se presenta: la colatitud PZ , la distancia polar del astro, o complemento de su declinación PL y su distancia cenital ZL , que será de 90° por estar sobre el horizonte. Como suponía conocidos los tres lados del triángulo de posición ZPL , pudo obtener en función de ellos el valor del ángulo en el polo P , es decir el ángulo horario de la estrella considerada: “es su distancia al meridiano en el instante que nace, o su arco semidiurno”.



Para calcular las horas de los ortos y ocasos, así como los acimutes de los mismos, ha de resolverse el triángulo rectilátero ZPL (su lado ZL vale 90°).

Bails particularizó el problema para el Sol, señalando que en ese caso debería de tenerse muy presente el efecto de la refracción sobre la distancia cenital, que supuso próximo a los $32'30''$, es decir prácticamente igual a su diámetro medio aparente. Aunque no concretara la fórmula general que lo solucionaría, si debe recordarse que a partir del mencionado triángulo se

podía obtener sin dificultad alguna el ángulo horario del Sol, en función de la latitud del lugar y de la declinación del mismo. La fórmula obtenida se simplifica notablemente al tratarse, como ya es sabido, de un triángulo rectilátero: $\cos h = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$. Dado que la declinación es en este caso variable⁸⁷ y está comprendida en el intervalo $-23^{\circ} 30' \leq 0^{\circ} \leq 23^{\circ} 30'$, es evidente que el ángulo horario, y por tanto la hora del orto y ocaso, variará a lo largo del año, cualquiera que sea la hora solar elegida: el propio ángulo horario o el resultado de sumarle 12 horas al valor calculado. Para saber si se trata del orto o del ocaso, ha de tenerse en cuenta que ambas posiciones son simétricas con relación al meridiano y que la suma de tales horas será de 24 horas.

También refirió Bails como se debía proceder al cálculo del acimut a partir del mismo triángulo anterior, sabiendo que dicha coordenada coincide con el ángulo en el cenit: “igual al arco HL del horizonte⁸⁸”. La aplicación de las fórmulas de trigonometría esférica al triángulo PZL conducirían a la relación siguiente: $\cos A = \operatorname{sen} \delta / \cos \varphi$. Se verificará por tanto que, para un lugar dado, variará el acimut del orto y del ocaso a lo largo del año, por hacerlo la declinación del Sol. Dicho de otra forma el Sol no sale por el Este y se pone por el Oeste, salvo cuando la declinación es nula, esto es en los equinoccios. Ciertamente, en esos dos casos $\cos A = 0$ y el acimut A valdría 90° o 270° , que identifican la dirección cardinal Este-Oeste ($A_E = 90^{\circ}$ y $A_W = 270^{\circ}$). La amplitud del arco descrito por el Sol sobre el horizonte es considerable y fácil de calcular, pues basta sustituir en la expresión anterior los valores extremos de la declinación y la latitud del lugar considerado⁸⁹.

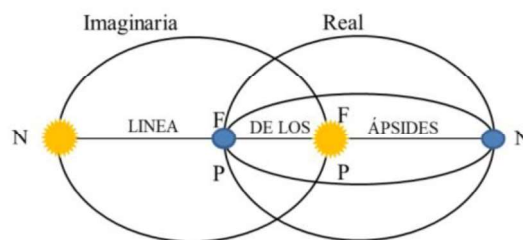
Al tratar Bails de la medida del tiempo contempló dos etapas, en primer lugar eligió como unidad el día, asociado como es notorio a la rotación de la Tierra alrededor del eje del mundo. Para analizar la segunda, el año, necesitaba apoyarse en una descripción más detallada del movimiento relativo asociado a la traslación terrestre. Habiendo definido ya tanto el ecuador como la eclíptica, comentó la trayectoria aparente del Sol por esta;

⁸⁷ En el resto de las estrellas no se presenta esta singularidad.

⁸⁸ Hasta mediados del siglo pasado se medía el acimut a partir del Sur, fue a partir de entonces cuando se eligió el Norte. La definición del acimut, una coordenada astronómica que forma pareja con la altura sobre el horizonte, es parecida a la del ángulo horario (cambiando el círculo horario de la estrella por el vertical de la misma): ángulo formado por el vertical del polo (el meridiano del lugar) y el vertical de la estrella, contado a partir del Norte y en sentido retrógrado.

⁸⁹ En el caso de Granada, con una latitud aproximada de 37° , resultaría una amplitud próxima a los $59^{\circ} 54'$. En cambio para Madrid ($\varphi \approx 40^{\circ}$), alcanzaría un desarrollo ligeramente superior: $\approx 62^{\circ} 44'$.

señalando la permanente variación de su declinación, al explicar la relación existente entre la oblicuidad y la longitud solar, que dedujo a partir del triángulo rectángulo formado por el equinoccio de primavera, el Sol y su proyección sobre el ecuador, según su círculo horario: $\text{sen } \lambda = \text{sen } \delta / \text{sen } \varepsilon$. Fijada la relación anterior, retomó la difícil cuestión del tiempo, recordando que si se partía de que el año tenía 365.25 días “le toca andar al Sol 59’8’’.3 cada día”. Asimismo indicaba como podría determinarse su longitud media: “por consiguiente con tomar las veces que sea menester esta cantidad, se determinaría de cuantos grados y minutos ha de ser la longitud del Sol, en el supuesto de que crezca regular y uniformemente, esto es, una misma cantidad cada día”.



La órbita descrita por la Tierra alrededor del Sol y la relativa que describe este en torno a aquella. Los puntos P y N se corresponden con el perigeo (perihelio) y con el apogeo (afelio). La excentricidad de ambas elipses aparece muy exagerada, puesto que es unas cinco veces menor que la que tienen los meridianos terrestres (sensiblemente circulares); este hecho es tan relevante como poco conocido.

Sin embargo precisó que tal proceder no era el correcto⁹⁰, como pronto comprobaron los astrónomos, los cuales “ echaron de ver que la longitud verdadera observada no siempre era igual con la longitud media calculada de antemano para cada día”. Bails identificó la discrepancia entre ambas longitudes con la ecuación de la órbita o ecuación de centro, especificando lo que entendían por ecuación los astrónomos: “la diferencia que va de una cantidad actual al valor que debería tener la misma cantidad si creciera siempre uniformemente y sin desigualdad alguna”. Más adelante refiere implícitamente la excentricidad de la órbita solar, pues define el apogeo y

⁹⁰ Bails señalaba inclusive las situaciones extremas: “la longitud verdadera del Sol solo es igual con la longitud media hacia principios de Enero y Julio, es 2° o 1° 55’31’’ mayor por abril, quiero decir que el día 1 de abril el Sol está en el punto donde debería hallarse el día 3, si hubiese caminado uniformemente en la eclíptica desde el día 1 de Enero, y si su longitud media fuese siempre igual con su longitud verdadera. Al contrario, hacia principios de Octubre, la longitud verdadera está atrasada la misma cantidad respecto de la longitud media”.

el perigeo, como los puntos en que las distancias del Sol a la Tierra son extremas⁹¹; análogamente hizo con el afelio y el perihelio: “como es la Tierra la que anda alrededor del Sol en la órbita donde nos parece que el Sol se mueve, llamamos afelio el punto N donde la Tierra está más distante del Sol F, y perihelio el punto P donde está más cerca. Llamánse también ápsides los dos puntos N y P de una órbita”.

Esas consideraciones previas las completó con una consecuencia eminentemente práctica para determinar el comienzo de las estaciones, que conviene reproducir en su integridad: “cuando se conoce todos los días o la longitud o la ascensión recta del Sol, es fácil de determinar el día y la hora del equinoccio, esto es, el día en que es cero la longitud del Sol, y lo son también su ascensión recta y declinación”. Bails subrayó, por otra parte, la gran importancia de los equinoccios para la medida del tiempo, ya que desde la antigüedad se venía definiendo el año solar como el intervalo temporal transcurrido entre dos equinoccios homónimos y sucesivos. De hecho recordó cómo se obtuvo la duración de esa nueva unidad de medida: “si se toman dos equinoccios observados mil años uno después del otro, y se divide el intervalo total en mil partes, se sacará con más puntualidad la duración del año. Por este método se ha sacado que el año dura⁹² 365^d 5^h 48^m 45^s”.

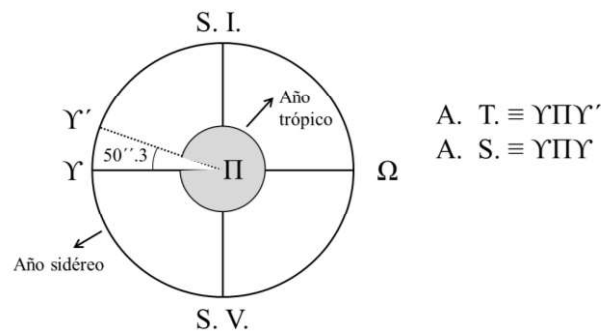
Acto seguido introdujo el año sidéreo como “el regreso del Sol a unas mismas estrellas”, aunque no tardó en precisar su verdadero significado y duración, en relación directa con la precesión equinoccial: “el año sideral es algo más largo que el año trópico, porque como las estrellas se apartan 50'' cada año del equinoccio, y necesita el Sol 20^m para andar esos 50'' de arco, síguese que el año sideral dura 20^m más que el año trópico. Por consiguiente el año sideral⁹³ es de 365^d 6^h 9^m 11^s”. Es inmediato por tanto que la duración angular del año trópico, el arco recorrido por el Sol en ese periodo, será menor de 360°, mientras que la del año sidéreo sería exactamente de 360°. La diferencia entre la duración de los dos años se puede obtener de forma aproximada, suponiendo que la velocidad del Sol

⁹¹ La Unión Astronómica Internacional fija el valor medio de la Unidad Astronómica en 149597.870700 km. En el perigeo la distancia del Sol a la Tierra sería de unos 147 098 millones de km, ascendiendo a 152 097 en el apogeo.

⁹² La exactitud de este dato proporcionado por Bails merece ser subrayada, ya que hoy día se supone que es de 365^d 5^h 48^m 45^s. 19”.

⁹³ Aunque Bails cifrase en 20^m el tiempo que necesitaba el Sol para recorrer los 50 segundos del arco eclíptico, en realidad era unos 25 s mayor, y a ello responde prácticamente la duración que dio para esta clase de año.

fuese uniforme durante todo el recorrido. En efecto, fijada la precesión en $50''.3$ y la velocidad lineal correspondiente en $359^{\circ}.9860/365.2422$, se trataría de hallar el tiempo invertido por el Sol en recorrer ese arco de $50''.3$. De manera que ha de calcularse el cociente $t = e / v \approx 50''.3 / [(359^{\circ}.9860) (3600''/^{\circ})/365.2422 \text{ d}] \approx 0.014176 \text{ d} \approx 20^{\text{m}}.41 \approx 20^{\text{m}} 25^{\text{s}}$; resultando pues los $20^{\text{m}} 25^{\text{s}}$ reflejados por Bails, que dura más el año sidéreo que el año trópico⁹⁴.



Proyección ortográfica de la esfera celeste centrada en el polo Norte de la eclíptica. Se ha supuesto que el retroceso anual del punto Aries es de $50''.3$. La duración angular del año trópico sería de $3590^{\circ} 59' 9''.6$, mientras que la del año trópico sería de 360° exactamente.

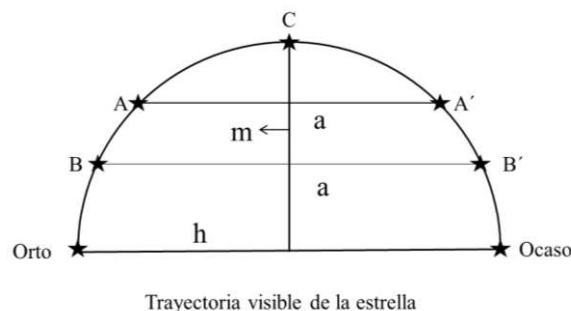
De nuevo volvió Bails a referirse a los días solares cuando comentó la dificultad que entrañaba determinar con exactitud el instante de la culminación superior del Sol sobre el meridiano del lugar y la necesidad de recurrir al método de las alturas correspondientes, presentadas por las estrellas en puntos equidistantes⁹⁵ del citado meridiano. Bails indicaba el *modus operandi* para obtener la hora de paso: “basta observar con un reloj de péndola, el instante en que se halló a cierta altura hacia el oriente al subir antes de llegar al meridiano, y observar después el instante en que se halla a la misma altura bajando hacia poniente después de su paso por el meridiano. El medio entre esos dos instantes tomado en el reloj será el tiempo que señalaba el reloj cuando el astro estuvo en el meridiano”.

Pronto hizo ver Bails la singularidad que presentaba el Sol , al no serle de aplicación esa metodología:

⁹⁴ Recuérdese que el año trópico tendría también 366.2425 días sidéreos, si se fijara en 365.2422 su duración en días solares medios.

⁹⁵ Sus ortos y ocasos son dos de las más características.

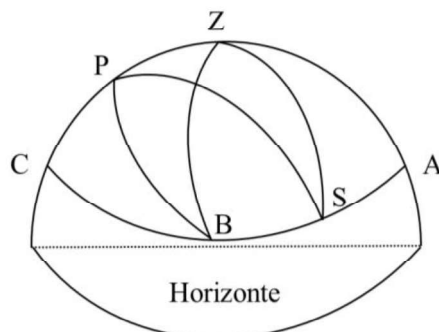
“pero este supuesto no se verifica, porque como el Sol anda cada día oblicuamente en la eclíptica un arco de 1° , se acerca o aparta por precisión algún tanto del ecuador...por consiguiente el medio día verdadero no estuvo a la misma distancia del nacer que del ocaso, y por lo mismo no basta tomar el punto medio entre el orto y ocaso del Sol, para determinar el instante del medio día...lo que acabamos de decir del orto y ocaso del Sol, se aplica a una estrella cualquiera, pongo por caso un círculo paralelo al horizonte que estuviese a 21° de altura. Estos círculos se llaman almicantarates”.



Posiciones y alturas correspondientes: a) almicantarades, m) meridiano del lugar, h) horizonte, C) culminación superior.

Bails explicó después como podría obtenerse la corrección que se tendría que aplicar a la semisuma de las alturas correspondientes para obtener la hora de la culminación y como resultaba decisiva la variación de la declinación solar con el tiempo. Para facilitar su explicación usó una imagen de la esfera celeste, similar a la que se ofrece a continuación. P es el Polo, Z el cenit, ASBC un almicantarat, PS es la distancia polar del Sol por la mañana y PB su homóloga vespertina, menor que la matutina. En los dos triángulos de posición PZB y PZS se determinarían los ángulos horarios respectivos, resultando que el de la tarde sería mayor que el de la mañana. Tales triángulos tendrían dos vértices comunes y dos lados iguales, ZS y ZB, correspondientes a la distancia cenital del almicantarat. Como bien apuntaba Bails: “los lados PS y PB discrepan la cantidad que ha variado la declinación del Sol en el intervalo de una observación a otra...si resolvemos separadamente estos dos triángulos, para sacar los dos ángulos horarios ZPS, ZPB, conoceremos su diferencia cuya mitad convertida en tiempo, a razón de 15° por hora, será la corrección que se deberá hacer al instante medio entre las dos observaciones para sacar el medio día

verdadero”. Bails reconoció además la necesidad de tener en cuenta las correcciones por el semidiámetro solar para los diferentes meses del año, recogidas en la tabla que se reproduce a continuación.



Triángulo de posición para diferentes puntos (B y S) de un almicantrat.

Sabida la hora de la culminación, explicó, con un ejemplo, el procedimiento a seguir para determinar la hora verdadera de una cierta observación: “supongamos que por el método propuesto se haya hallado que un reloj señalaba el día 1 de enero a medio día $0^h 3^m 57^s$ y que al día siguiente o el día 2 de enero se haya hallado por el mismo método que el reloj señalaba $0^h 4^m 45^s$ a medio día, esto es , 48^s más que el día antes...Supongamos ahora que se observase por la noche un fenómeno celeste, pongo por caso el principio de un eclipse, cuando el reloj señalaba $9^h 30^m 57^s$, hemos de determinar el tiempo verdadero que corresponde a esta hora de reloj”. Como es obvio, se trataría de calcular el adelanto producido en el intervalo transcurrido entre el mediodía y la hora aparente de la observación, es decir en $9^h 27^m$. Dado que en 24^h fue de 48^s , resultarán prácticamente 19^s ; de manera que el adelanto sería por lo tanto de $3^m 57^s$ más 19^s , esto es $4^m 16^s$. La hora de la observación corregida sería finalmente $9^h 26^m 41^s$, resultado de restarle el adelanto obtenido a la hora aparente.

Hasta aquí fueron varias las ocasiones en que Bails mencionó las irregularidades de los días solares, concluyendo que “no es, pues, el Sol, hablando con rigor, una medida cabal del tiempo, y la hora verdadera que señala no puede servir para medir el tiempo, cuya esencia estriba en su igualdad. Pero como el tiempo verdadero tiene la circunstancia de que le podemos observar siempre que queramos, nos valemos de él para hallar un tiempo medio y uniforme, que se necesita para los cálculos”. A la

diferencia entre ambas clases de tiempo: tiempo verdadero y tiempo medio, se le conoce como ecuación de tiempo, cuyo valor varía a lo largo del año⁹⁶.

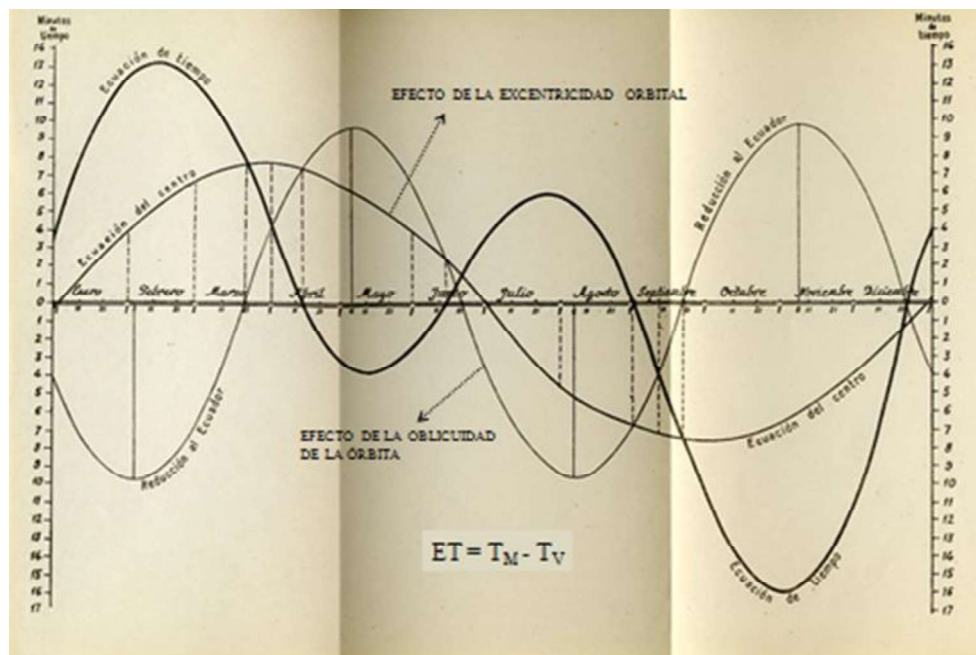
Antes de concretar algunos de los valores alcanzados por esa diferencia, se entretuvo Bails en justificar la variabilidad de los días por el movimiento irregular del Sol sobre la eclíptica; pues de acuerdo con la segunda ley de Kepler se acelera en las proximidades del perigeo y se ralentiza en el entorno del apogeo. Así daba cuenta del fenómeno nuestro protagonista: “sucede que a principios de julio el Sol no anda más que 57’11’’ cada día hacia el oriente, y a principios de enero anda 61’11’’, es a saber 4’ más que por julio, a lo largo de la eclíptica en virtud de su movimiento propio. Esta es la primera causa por que los días son desiguales”. Sin embargo ese no era solo el origen de la desigualdad entre los días solares, tal como recordaba a continuación: “con esta causa que pende de la desigualdad del movimiento solar en la eclíptica, se junta otra que pende de la situación de la eclíptica”; una clara alusión a su inclinación con relación al ecuador.

La regularidad del tiempo solar, se logró como es sabido con la introducción del llamado tiempo medio, apoyado en dos soles imaginarios con velocidad uniforme: uno se desplazaría sobre la eclíptica, el Sol ficticio, y otro sobre el ecuador, el Sol medio. El Sol ficticio recorre la eclíptica con una velocidad constante y coincide con el verdadero en el perigeo y en el apogeo; es decir que pasado el perigeo el Sol verdadero adelanta al ficticio, al contrario de lo que sucede en el apogeo. El Sol medio recorre el ecuador celeste con velocidad uniforme y coincide con el ficticio en los dos puntos equinocciales, verificándose pues la coincidencia entre la ascensión recta del Sol medio y la longitud del ficticio.

Para calcular la diferencia entre los dos tiempos solares a lo largo del año, se realizan previamente una serie de transformaciones. Partiendo de que $ET = T_M - T_V = 12^h + h_{SM} - (12^h + h_{SV}) = h_{SM} - h_{SV} = TS - \alpha_{SM} - TS + \alpha_{SV} = \alpha_{SV} - \alpha_{SM}$. Sumando y restando la longitud del Sol verdadero, λ_{SV} , quedaría: $ET = \alpha_{SV} - \lambda_{SV} + \lambda_{SV} - \alpha_{SM}$; ahora bien como la ascensión recta del Sol medio coincide con la longitud del Sol ficticio resultaría que $ET = \alpha_{SV} - \lambda_{SV} + \lambda_{SV} - \lambda_{SF}$. A la primera diferencia se le conoce con el

⁹⁶ La ecuación de tiempo se anula cuatro veces: 15 de abril, 13 de junio, 1 de septiembre y 25 de diciembre. Alcanza dos máximos, de 14^m 15^s (11 de febrero) y de 6^m 30^s (26 de junio), y dos mínimos negativos de -3^m 41^s (14 de mayo) y de -16^m 25^s (3 de noviembre).

nombre de Reducción al Ecuador (RE), mientras que la segunda es llamada Ecuación de centro (EC); con esa nueva nomenclatura $ET = EC - RE$. La Ecuación de Centro se anula en el perigeo (en torno al 1 de enero) y en el apogeo (alrededor del 1 de julio). Su representación gráfica es por tanto una especie de senoide con periodo semestral, originada por la excentricidad de la órbita. En cambio la Reducción al Ecuador se anula en los equinoccios y en los solsticios, de manera que su representación gráfica es otra curva sinusoidal pero de periodo trimestral, originada por la oblicuidad de la eclíptica. Se entiende por tanto que Bails concluyera sus comentarios sobre la medida del tiempo de la forma siguiente: “la ecuación de tiempo es la diferencia entre la longitud media, y la ascensión recta verdadera del Sol, convertida en tiempo...la ecuación de tiempo consta de dos partes, la primera es la diferencia entre la longitud media y la longitud verdadera, convertida en tiempo; la segunda es la diferencia entre la longitud verdadera, y la ascensión recta verdadera, también convertida en tiempo”.



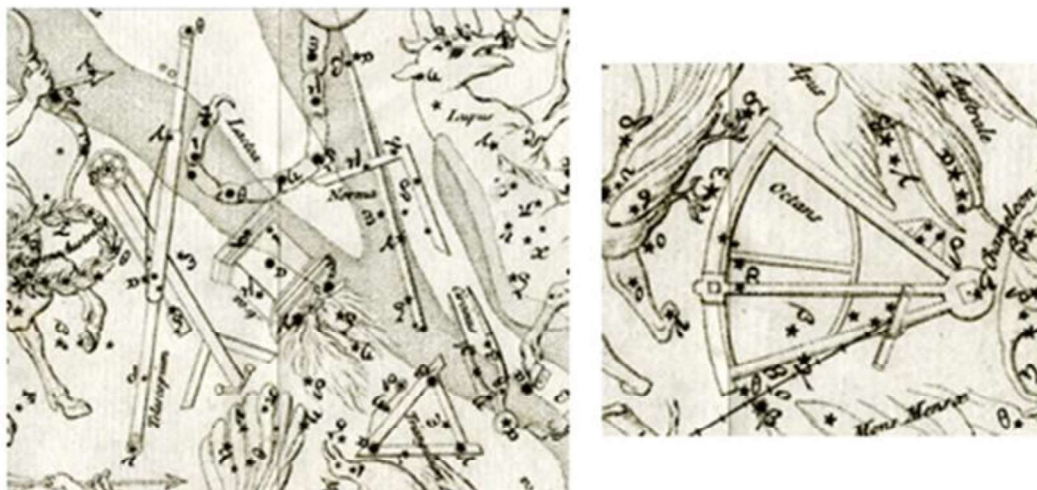
Indistintamente se define la ecuación de tiempo como $T_M - T_V$ o como $T_V - T_M$. La primera forma ha venido siendo la más utilizada, aunque la segunda parece que está llamada a ser la única.

Termino esta apretada selección de los Principios de Astronomía, escritos por Benito Bails, reproduciendo el listado de las cien constelaciones que se incluyeron en los mismos. Aparecieron divididas en tres grandes grupos: las zodiacales y las clásicas de los dos hemisferios; posteriormente complementadas con las sucesivas aportaciones de astrónomos tan

afamados como J. Hevelius, E. Hadlley, J. Bayer o el abate Lacaille. Entre las de este último, todas australes, destacaban las de contenido científico: el reloj astronómico, la brújula, la máquina pneumónica, el octante de reflexión, el compás, la escuadra y la regla, el telescopio y el microscopio. El carácter mitológico de muchas de ellas quedó plasmado en la nomenclatura empleada por Bails, quien comentaba: “todas están en la tabla siguiente, con los nombres de las figuras que en ellas se han dibujado para ayudar a la fantasía”. Con el fin de facilitar su posible localización sobre la bóveda celeste recomendó los mapas celestes del inglés J. Senex⁹⁷, aunque indicara que el más usado por los astrónomos era el que recientemente (1755) había presentado P. Ch. Le Monnier, en París, con las doce constelaciones del zodiaco.

TABLA DE LAS CIENTO CONSTELACIONES QUE SE FIGURAN EN LOS GLOBOS CELESTES			
12 Constelaciones del zodiaco.	Siguen las 23 Constelaciones boreales.	Siguen las 22 Constelaciones que añadieron Hevelio, el P. Antelmo, Halley etc.	Siguen las 14 Constelaciones australes.
Aries.	La Flecha.	La Cruz	El Pavo real.
Tauro.	La Lira.	El Sextante de Urania.	El Tucan
Géminis.	El Cisne.	El Romboide.	La Hidra macho.
Cáncer.	El Delfín.	Los Perros de caza.	La Dorada.
Leo.	15 Constelaciones australes de los antiguos.	El León chico.	El Pez volador.
Virgo.	Orión.	La Zorra.	El Camaleón.
Libra.	La Ballena.	El Ganso.	<i>También hay la Nube grande y la Nube chica.</i>
Escorpio.	El Eridano.	El escudo de Sobieski.	<i>14 Constelaciones del Abate de la Caille.</i>
Sagitario.	La Liebre.	El triángulo chico.	El Taller del escultor.
Capricornio	El Perro grande.	El Gran cerbero.	El Horno de Química.
Acuario.	El Perro chico.	Rameau.	El Reloj Astronómico.
Piscis.	La Hidra hembra.	El Lagarto.	La Reticula romboide.
23 Constelaciones boreales de los antiguos.	La Copa.	El Monte Ménalo.	El Buril del Grabador.
La Osa mayor.	El cuervo.	El Corazón de Carlos II.	El Caballete del Pintor.
La Osa menor.	El Centauro.	La Encina de Carlos II.	La Brújula.
El Dragón.	El Lobo.	<i>14 Constelaciones australes de Teodori, Bayer.</i>	La Máquina Pneumática.
Cefeo.	El Altar.	El Indio.	El Octante de reflexión.
Casiopea.	El Pez austral.	La Grulla.	El Compás.
Andrómeda.	El Navío.	El Fenix.	La Escuadra y La Regla.
Perseo.	La Corona austral.	La Abeja o la Mosca.	El Telescopio.
Pegaso.	22 Constelaciones que añadieron Hevelio, el P. Antelmo, Halley etc.	El triángulo austral.	El Microscopio.
El Caballo chico.	Cameleopardo.	El Ave del paraíso.	La Montaña de la mesa.
El Triángulo boreal.	El Río Jordán.		
El Cochero.	El Río Tigris.		
La Cabellera e Berenice.	El Cetro y la Flor de Lis.		
El Boyero.	La Paloma.		
La Corona boreal.	El Licornio o Monoceronte.		
El Serpentario u Ofiuco.			
La Serpiente.			
Hércules.			
El Águila.			
Antínoo.			

⁹⁷ Bails se refería a la obra siguiente: *Zodiacus Stellatus Fixas Omnes Hactenus Cognitas, Ad Quas Lunae Appulsus Ullibi Terrarum Telescopio Observari Poterunt, Complexus*, publicada en Londres (1718); fue la única representación de las constelaciones zodiacales hasta que apareció la de Le Monnier.



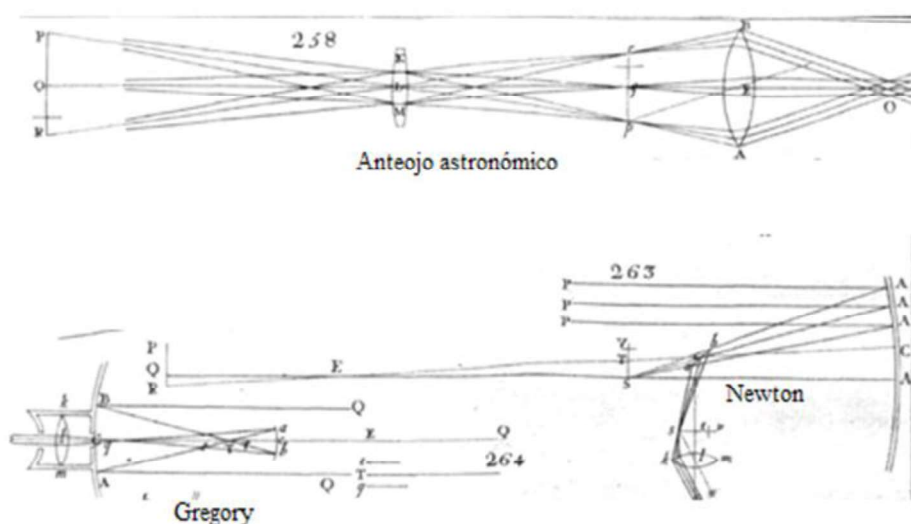
Varios de los instrumentos matemáticos con que se identificaron algunas constelaciones en el planisferio austral del abate La Caille (1763).

Tampoco podía faltar en esta selección una referencia al fundamento óptico de los instrumentos astronómicos modernos, muy bien estudiado y enseñado por Benito Bails; aunque tratara de ellos en los Principios de Óptica, un capítulo sobresaliente y magníficamente ilustrado que incluyó también en el tomo segundo de sus Principios de Matemática. En este contexto destacan sus descripciones del anteojo astronómico y del telescopio, además de su explicación sobre la trayectoria del rayo luminoso y la consiguiente formación de las imágenes de los objetos visados. En el esquema del primero introdujo las dos lentes convexas, ocular y objetivo, de foco común; indicando como se conseguía finalmente la imagen invertida y ampliada del objeto, dependiendo de la relación entre las distancias focales respectivas: “estando dispuestos de este modo los vidrios, se verá el objeto distintamente, bien que trastornado y ampliado en la razón de qL a qE ; esto es, en la razón que hay entre la distancia focal del objetivo y la del otro vidrio”.

Bails se refirió igualmente al anteojo batávico⁹⁸ o de Galileo, distinto del astronómico, en tanto que “en vez de colocar un ocular convexo entre el ojo y la imagen para conseguir que sean paralelos los rayos de cada uno de los manojos que han de entrar en el ojo, se hace uso de un ocular cóncavo AE , poniéndole entre el objetivo y la imagen,..., de manera que su foco

⁹⁸ Con esta denominación estaba dando por supuesto que el origen del anteojo era holandés, ya que los bátaos fueron antiguos pobladores de los Países Bajos (de hecho existió la República de Batavia entre los años 1795 y 1806). Sin embargo no hay unanimidad en ese sentido, pues también se cree que el anteojo fue inventado por los hermanos Roget en Gerona.

coincida con el del objetivo...en este anteojo se ven los objetos en su situación natural”. En este caso, al contrario de lo que sucedía con el anteojo astronómico, el campo no dependía del ancho del objetivo y “por esta razón este anteojo no coge tanto campo y no es de un uso tan acomodado”.



Ilustraciones de Benito Bails con relación al anteojo astronómico y a los telescopios de Newton y de Gregory.

La referencia al telescopio se centró en el ideado por Newton⁹⁹, admitiendo genéricamente que se trataba de “instrumentos compuestos de dos vidrios, y sirven para ver objetos por rayos reflejos”. Con el telescopio de Newton “aumentaba el diámetro de un objeto distante en la razón de la distancia focal del espejo a la del ocular, y con él se ve el objeto trastornado”. Bails descendió a características tan concretas como la nitidez y la coloración de las imágenes¹⁰⁰. De la primera comentaba que mejoraba sensiblemente dando menor abertura a los objetivos “cerrándoles con esto a los rayos muy apartados del eje la entrada del anteojo, no pueden turbar la imagen”. El otro inconveniente asociado a la heterogeneidad de la luz, que “al atravesar los vidrios se divide en rayos de colores y refrangibilidades diferentes, de donde resulta que las imágenes formadas por refracción están terminadas

⁹⁹ No obstante es obligado señalar que también describió el que había inventado años atrás el matemático y astrónomo escocés James Gregory y que, por primera vez, construyó Robert Hooke en 1673. El telescopio consta esencialmente de dos espejos cóncavos: primario y secundario. En el primero se refleja la luz procedente de la estrella, que alcanza el segundo espejo y se refleja para pasar a través de la abertura central del primario, en el eje óptico de ambos, y llegar al observador.

¹⁰⁰ “dos obstáculos muy grandes que se oponen a la perfección de los anteojos o telescopios dióptricos”. Bails había definido antes la Catóptrica como “el ramo que trata de la luz refleja” y la Dióptrica como el que trataba de la luz refractada.

por franjas coloreadas, que hacen dudoso su tamaño”. Dio cuenta asimismo del esfuerzo de los “matemáticos e ingenieros ópticos” para remediar este defecto y conseguir anteojos acromáticos¹⁰¹.

Termina esta primera selección de las cuestiones astronómicas, abordadas por Bails, con un resumen de su crónica sobre la historia del cómputo del tiempo, puesto que así podrían considerarse sus Principios del Calendario¹⁰² incluidos en el segundo libro de matemáticas. Primeramente clasificó los días en naturales y artificiales, correspondiendo los primeros al periodo de revolución de la Tierra en torno a su eje y los segundos al intervalo transcurrido entre el orto y el ocaso del Sol. Se infiere de ello que la duración de los primeros es prácticamente constante e igual a 24^h, mientras que la de los segundos variaba a lo largo del año¹⁰³, para cada lugar de diferente latitud; en este segundo caso daba por supuesto que la noche era opuesta al día. El comienzo de ese día natural no era universalmente aceptado por todas las civilizaciones, como indirectamente señalaba Bails: “unas le empiezan desde que el Sol nace, como los Asirios; otras desde que el Sol se pone, como los Italianos; otras desde media noche, como lo hacemos nosotros; y los Astrónomos le empiezan a las doce del día¹⁰⁴”.

En la antigua Roma, cada día primitivo tenía doce horas, identificándose cada una de ellas con su número de orden: *prima*, *seconda*, *tertia*, etc. Bails solo refirió las llamadas canónicas: *prima*, *tertia*, *sexta*¹⁰⁵ y *nona*, pues con ellas se dividía el día en cuatro partes iguales: “prima empezaba al nacer el Sol, tertia tres horas después, sexta a medio día y nona, tres horas antes de ponerse el Sol. Los mismos nombres se usan todavía en el Breviario de la Iglesia Romana”. Como la duración del día era variable, también lo fueron esas horas, dependiendo su duración de la latitud del lugar y de la época

¹⁰¹ El óptico inglés John Dollond fue el primero que comercializó las lentes y telescopios acromáticos a partir del año 1758, patentando las lentes. En ese mismo año publicó su trabajo *Account of some experiments concerning the different refrangibility of light*, dando cuenta de los experimentos que le habían permitido construir lentes acromáticas a partir de los cristales *crown* y *flint*.

¹⁰² Bails definió el calendario como “una distribución de los tiempos que los hombres han inventado para su uso. El conocimiento del calendario abraza muchos puntos, es a saber, los días, los meses, los años, el ciclo solar, las letras dominicales, el ciclo lunar, la indicción, el periodo victoriano, el periodo juliano, y las epactas. El cálculo de todas estas diferentes partes expresadas con números se llama *cómputo eclesiástico*”.

¹⁰³ No obstante es obvio que la duración total obtenida al sumar la de este día y la de su noche coincide con la del día natural.

¹⁰⁴ Es decir a partir de la culminación superior del Sol. La culminación inferior se produciría a media noche. La posición del Sol, marcaría en el primer caso la dirección del Sur y en el segundo la del Norte.

¹⁰⁵ Aunque sea solo a título de curiosidad, se debe añadir que la palabra siesta hace referencia a esa hora.

del año. Para hacerse una idea de la amplitud de tal variación, se ha calculado para un lugar como Granada ($\phi \approx 37^\circ 10'$) en dos épocas extremas: solsticio de verano ($\delta = 23^\circ 26'$) y solsticio de invierno ($\delta = -23^\circ 26'$). Teniendo en cuenta que la duración de este día es el doble del ángulo horario del Sol, en el instante de su ocaso, se trataría de sustituir en la fórmula que lo expresa ($\cos h = -\tan \phi \tan \delta$) los valores de la latitud y de la declinación solar. En el primer caso resultaría que el día dura $14^h.5578$ y en el segundo $9^h.4422$. Ahora bien, como ese periodo tendría a su vez doce horas, es evidente que en el día del solsticio de verano cada hora tendría $1^h.21$, mientras que el del solsticio de invierno solo tendría $0^h.78$; es decir que las horas del verano serían más largas que las del invierno.



Calendario romano con los signos del zodiaco en su parte superior.

Bails continuó refiriéndose al calendario romano, indicando que los meses se dividían en solares y lunares. Igualmente apuntó que Rómulo¹⁰⁶ solo contempló diez en el año, “es a saber, Marzo, que era el primero, Abril, Mayo, etc.”, aclarando que Julio y Agosto eran conocidos entonces con los

¹⁰⁶ Al mítico fundador de Roma (alrededor del año 753 a.C.) se le atribuye generalmente el siguiente calendario: *Martius* (31 días), *Aprilis* (30 días), *Maius* (31 días), *Iunius* (30 días), *Quintilis* (31 días), *Sextilis* (30 días), *September* (30 días), *October* (31 días), *November* (30 días), *December* (30 días). Los nombres de los meses, en algunos casos, honraban a los dioses: *Martius* (Marte), *Maius* (Maia) y *Iunius* (Juno). *Aprilis* hacía referencia a la época en que se abrían los brotes.

nombres de *quintil* y *sextil* “porque el uno era el quinto y el otro el sexto mes del año”. Los doce meses se instauraron bajo el reinado de Numa Pompilius¹⁰⁷, gracias al añadido de Enero y Febrero. “Pero después quiso Julio Cesar que el mes quinto llevase su nombre, y desde entonces (44 a.C.) se llama Julio, al sextil se le dio el nombre del Emperador Augusto, y por eso se llama Agosto”. Bails dio también las claves de la diferente duración de los meses solares, atribuyéndole asimismo a Julio Cesar el deseo de que unos tuviesen 31 días y otros 30, con la salvedad de febrero que solo tendría 30 días en los años bisiestos. “pero quiso Augusto¹⁰⁸ que el mes de su nombre fuese tanto como los demás, y quitó un día al mes de Febrero para dársele al de Agosto”.

Para identificar los días de cada mes¹⁰⁹ se valieron los romanos de tres orígenes conocidos con los nombres de *kalendae*¹¹⁰, *nonae* e *idus*. Las calendas coincidían con el día primero de cada mes, las nonas eran variables, pues se correspondían con el séptimo día de los meses de marzo, julio y octubre, y con el quinto del resto de los meses. En cuanto a los idus, coincidían con los días quince de los meses de marzo, mayo, julio y octubre, y con los trece en los otros meses del año. Bails comentaba que los demás días del mes se localizaban tomando esos orígenes como referencia, señalando siempre el número de días que faltaban para alcanzarlos:

“quiero decir que los días entre las calendas y las nonas se llamaban los días *de antes de las nonas*, según su orden. Los días que caían entre las nonas y los idus se llamaban los días *de antes de los idus*; finalmente los días que caían entre los idus y las calendas del mes de que se seguía, se llamaban los días *de antes de las calendas* de dicho mes. En los meses de Marzo, Mayo, Julio y Octubre había seis días que tomaban su nombre de las nonas, en los otros meses había cuatro no más. En todos los meses había ocho días que sacaban su nombre de los idus”.

¹⁰⁷ El segundo de los siete reyes de Roma reformó el calendario lunar de Rómulo hacia el año 713 a. C. introduciendo los nuevos meses de *Januarius* y *Februarius*. Januarius honraba al dios Janus, Februarius recordaba el periodo de los sacrificios (*Februalia*).

¹⁰⁸ La nueva denominación se hizo en el año 8 a. C.

¹⁰⁹ La introducción de las semanas egipcias fue muy posterior, atribuyéndosele al emperador Alejandro Severo un primer intento a comienzos del siglo III. Sin embargo fue el emperador Constantino quien cien años después implantó la semana de siete días, dedicada a los planetas (incluidos el Sol y la Luna); fue entonces cuando se decidió que fuese el domingo el día de descanso, en detrimento del *shabat* de los hebreos.

¹¹⁰ De ahí procede la palabra calendario.

Como síntesis de su explicación reprodujo los dos versos clásicos siguientes:

Sex Maius Nonas, October, Julius & Mars:

Quatuor at reliqui: habet idus quilibet octo.

El filósofo griego Metón fue uno de los primeros en tratar de sistematizar el movimiento de la Luna, cerca del año 430 a.C. Tal como refería Bails, reparó que en 19 años solares había 235 meses lunares cabales “y esta determinación solo se aparta de la verdad un día en 312 años”; a ese intervalo de tiempo se le llama en su honor ciclo de Metón o ciclo metónico, “al cabo del cual las lunas nuevas se suceden en los mismos días del año. El número áureo¹¹¹ señala el año del ciclo lunar, se señala con 1 siempre que la Luna nueva es el día 1 de Enero, como en 1767”. Al intervalo entre dos lunas nuevas consecutivas, unos 29^d 12^h 44^m, es a lo que se le denomina mes lunar¹¹², lunación o revolución sinódica. Para simplificar el cómputo de los meses lunares se supusieron meses sinódicos alternados de 30 y 29 días, a los primeros se les llamó llenos y a los de 29 días cavos. Bails introdujo asimismo los llamados meses embolísmicos intercalares, asociados precisamente al referido ciclo¹¹³, de utilidad en los calendarios eclesiásticos.

Bails se refirió también al año cuando analizó el problema del calendario repitiendo que el año trópico era el intervalo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por un mismo equinoccio o por un mismo solsticio. Citó igualmente el año lunar astronómico, compuesto de doce lunaciones o de 354^d 8^h y 48^m. No obstante, lo más interesante de sus comentarios fue su explicación sobre el origen del año trópico, situándolo en la época de Julio Cesar y partiendo de una primera duración cifrada en 365^d y 6^h: “porque habiéndolo preguntado a los Astrónomos más afamados de su tiempo, se le dijo que desde un equinoccio al inmediato del mismo nombre había 365 días 6 horas. Pero como sería muy incómodo empezar el año algunas horas después de acabado el día, se dejan las 6 horas de cada año, las cuales al

¹¹¹ Hay 19 números áureos, llamados así por grabarse cada año en los muros de un templo ateniense. Para hallar el número áureo de un año dado se le suma 1 y se divide por 19, el resto de la división es precisamente el número buscado; así el del año 2016 sería el 3 y el del 2020 el 7.

¹¹² Bails mencionaba igualmente el mes lunar periódico como el tiempo invertido por la Luna en recorrer el zodiaco, teniendo una duración próxima a los 27^d 7^h 43^m.

¹¹³ Para ello consideró que de las 235 lunaciones, 228 correspondían a las 12 lunaciones por año y el exceso de 7 debido a los 11 días que dura el año solar más que el lunar; a esos siete meses es justamente a los que llamó embolísmicos, seis de ellos tendrían 30 días cada uno y 29 el restante.

cabo de 4 años componen 24 horas, esto es un día entero. Esta es la razón porque cada cuarto año tiene un día más que los tres anteriores”. Ese cuarto año sería pues de 366 días, llamándose bisiesto porque en el mes de febrero de dicho año había un día denominado *bissextus*.

Ahora bien, recordando que la duración verdadera del año trópico era unos 11^m más corto de lo previsto por Julio Cesar, se fue acumulando un error en los siglos siguientes que concluyó con la obligada reforma del calendario durante el papado de Gregorio XIII. Bails aclaraba, poco más adelante, el motivo principal de la reforma, al concretar que el error de 11^m se transformaría en unas 24^h en el transcurso de 134 años: “de aquí es que en el pontificado de Gregorio XIII, hacia el año de 1580, el equinoccio de la primavera, que en tiempo del Concilio Niceno celebrado en 325, caía a 21 de Marzo, caía entonces a 11 del mismo mes. Por consiguiente los 11^m de diferencia habían ocasionado un error de 10 días cabales”.

Es sabido que para hacer efectiva la corrección, se quitaron diez días al año 1582. Tan novedoso acontecimiento tuvo lugar formalmente en la ciudad de Roma, durante el mes de octubre, de manera que “el día que sigue a la fiesta de S. Francisco, esto es el 5 de este mes, se contó 15”. Como señaló luego Bails: “con la mira de precaver el mismo inconveniente en lo sucesivo...Mandóse, pues, que en 400 años los últimos años de los tres primeros siglos no fuesen bisiestos, y que solo lo fuese el último del cuarto siglo...con esto se suprimen 3 días en 400 años, porque, por el Calendario de Julio Cesar, el año centésimo o último de cada siglo, había de ser indefectiblemente bisiesto”.

Como información complementaria a la proporcionada por Bails, es obligado reseñar que el principal artífice¹¹⁴ de esta reforma fue el jesuita, y astrónomo alemán Christopher Clavius; el cual detalló todos los detalles de la misma en su obra más sobresaliente: *Romani Calendari a Gregorio XIII P. M. restituti explicatio, S. D. N. Clementis VIII*; publicada en Roma (1603). La aceptación del cómputo moderno del tiempo no fue universal, aunque inmediatamente se adoptase en España, Italia, en la parte católica de los Países Bajos y en Portugal. Francia lo hizo en diciembre de 1582, siguiéndola la Alemania católica al año siguiente. Los países protestantes se opusieron durante más de un siglo al calendario "papista", decidiendo su

¹¹⁴ Realmente modificó la propuesta realizada en un principio por el italiano Aloysius Lilius, también conocido como Luigi Lilio, Luigi Giglio.

adopción en el año 1700. Inglaterra esperó hasta 1750, declarándolo legal el día 2 de septiembre de 1752, que fue seguido por el 14 del mismo mes (se aprovechó además la ocasión para que el año comenzara el 1 de Enero en lugar del 25 de Marzo). Finalmente la iglesia ortodoxa no lo aceptó hasta el año 1923, en que se instauró en la antigua Unión de Repúblicas Soviéticas.



Explicación del nuevo calendario gregoriano. Se presentan también las imágenes de dos de los astrónomos que lo propiciaron: Clavius (s) y Lilio (i).

Teniendo en cuenta la hegemonía del imperio español, no se hubiera producido tan rápida implantación sin el beneplácito y valiosa colaboración del rey Felipe II, quien había estado al tanto de todo el proceso de la reforma; de hecho hubo intercambio epistolar entre él y el papado sobre ese particular. La implantación del nuevo calendario le sorprendió en Lisboa, promulgando allí mismo un decreto al efecto (29. 9.1582), señalando que en todos sus reinos “el quinto día del mes de octubre pasara a ser decimoquinto”, siguiendo así lo dispuesto en la bula papal. No obstante, era plenamente consciente de la dificultad que ello entrañaba, a tenor de sus propias palabras: “bien creo que habrá dudas en esto del año, más ellas se irán entendiendo”.

En cualquier caso, la efectividad del nuevo calendario en el imperio español se demoró un tanto por su especial localización geográfica, con

vastos territorios de ultramar sumamente alejados entre sí y de la metrópoli; de modo que la difusión del mismo no pudo ser simultánea ni tampoco homogénea. El rey, conocedor de la situación, decidió que la reforma debería posponerse en el nuevo mundo, pensando primero en el año 1583 y después en el 1584. Así se desprende, al menos, del documento que firmó en Aranjuez (14.05.1583), con un título muy elocuente: *Pragmática sobre los diez días del año*, con evidente referencia a los días de octubre ya comentados. El escrito del Felipe II es un legado científico relevante que demuestra su interés por la ciencia astronómica y reivindica, aunque sea indirectamente, el papel esencial jugado por España en la modificación del calendario juliano¹¹⁵.

Aunque la causa fundamental de la reforma del calendario juliano fuese la inexacta duración del año trópico, hubo un segundo motivo que la impulsó y que Bails explicó con toda claridad: “los números de oro que se pusieron en el calendario hacia el año 530 de Jesucristo no señalaban puntualmente las lunas nuevas, y eran cuatro días antes de lo que estaban señaladas...esto proviene de que las 235 lunaciones que hay en 19 años, no componen 19 años cabales, falta algo; de donde resulta...que al cabo de 625 años la luna nueva es dos días antes. Y si 625 años dan un error de dos días, 1250 años darán un error de 4 días”. Los números áureos no servían por lo tanto para lograr un calendario perpetuo, como le comunicaron al papa todos los astrónomos que convocó a Roma.

De entre todos ellos, el único que propuso una solución alternativa fue precisamente Lilio, consistente en la inclusión de treinta números romanos, llamados epactas¹¹⁶, que se deberían escribir al lado de los días de cada

¹¹⁵ El lector interesado puede consultar tan interesante orden al final del artículo: Pragmática Astronómica de Felipe II (*Chronica Nova* 35/2009, pp: 403-412). No quiero terminar estos breves apuntes sin referir tres curiosidades, que solo se pueden explicar a la luz del calendario gregoriano, y que no son muy conocidas fuera del círculo selecto de los especialistas. Santa Teresa de Jesús falleció el 4 de octubre de 1582 y fue enterrada al día siguiente, es decir el día 15 de ese mismo mes; de manera que los que trataron de explicar, en el pasado, por qué estuvo insepulta diez días, probaron con su osadía que ignoraban la reforma que se ha venido comentando. El segundo ejemplo se refiere a Cervantes y a Shakespeare, dos personajes insignes que murieron en la misma fecha (23.04.1616), pero en diferente día. Recuérdese que en Inglaterra aún estaba vigente el calendario juliano, de modo que Cervantes falleció 11 días antes que su homólogo inglés. La última anécdota se refiere a la célebre revolución rusa, que tuvo lugar el 25 de octubre del año 1917, de acuerdo con el antiguo calendario juliano. Quiere decir que en Occidente se debería haber conocido como la revolución de noviembre, una denominación más rigurosa que sería acorde con el calendario en vigor.

¹¹⁶ Bails explicaba que la epacta provenía de ser el año solar mayor que el lunar, puesto que el primero tenía 365 días y el otro 354, “por ese motivo se suele decir que la epacta es el exceso que el año solar lleva al año lunar”.

mes, al igual que se venía haciendo con los números áureos¹¹⁷. El orden previsto para las epactas era decreciente en relación con el de los días del mes, como bien indicaba Bails: “la epacta XXX está al lado del día primero de Enero, la epacta XXIX está al lado del día 2, XXVIII está al lado del día 3, hasta la epacta I que corresponde al día 30 del mismo mes. Síguese después el asterismo * que corresponde al día 31, y después XXIX al lado de 1 de Febrero, después XXVIII al lado del día 21 y lo demás a este tenor”. La epacta era pues el número de días que la Luna precedía al principio del año solar, “por ejemplo, en 1744 había 15 días de epacta, porque la Luna tenía 15 días cuando el año empezó. Esta es la razón porque la epacta de 1744 era XV. La epacta de 1746 fue VII, porque la Luna tenía 7 días cuando empezó el año 1746”.

Números áureos			1	2	3	4	5	6	7	8
Epactas			*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII

Epactas en los 19 años del ciclo de Metón, supuesto que la luna nueva coincide con el primer año del ciclo.

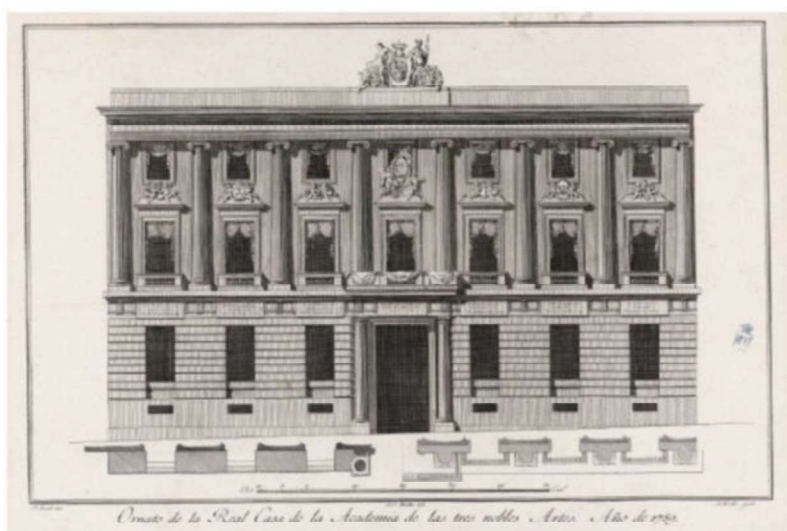
Elementos de Astronomía

El prestigio alcanzado por Benito Bails fue parejo al impacto causado por sus monumentales Elementos de Matemática, hasta el extremo de que la Academia de San Fernando comentó que había dado a la Nación “la obra más completa que el día conoce”; así se pronunció en la advertencia con la que presentó los Elementos de astronomía, integrados en aquellos. Estos últimos fueron calificados en el prólogo, del propio autor, como los más relevantes de toda la obra¹¹⁸. El carácter póstumo de este volumen VII queda probado cuando se indicaba en la presentación anterior: “pero la Academia que tanto se interesa en la instrucción nacional, no ha omitido diligencia ninguna después del fallecimiento del citado Bails, para que el

¹¹⁷ Con la salvedad de que ahora cada día iría junto a la epacta correspondiente, cuando los números áureos solo acompañaban a algunos días del mes. La relación entre los números áureos y las epactas anuales es la siguiente (válida hasta el año 2199): Epacta anual = Resto [(Número áureo-1). 11/30]-1; se comprende que el Resto se obtiene al dividir el año en cuestión (más uno) por 19.

¹¹⁸ Estas fueron las palabras de Bails: “aunque de igual utilidad todos los asuntos de esta obra, es sin duda alguna la Astronomía el de mayor elevación”.

público empiece a disfrutar unos libros que tanto ha desea”. No obstante, tanto este volumen como el octavo ya estaban impresos desde el año 1775, tal como dejó escrito Bails en una nota de la segunda edición del tomo I, aunque no se pudiese publicar por estar pendientes de la corrección de erratas y de ciertos detalles de las figuras que los ilustraban.



La Casa de Panadería, primera sede de la Academia de San Fernando, en la Plaza Mayor de Madrid, y grabado de la Real Casa de las tres nobles Artes, efectuado por Francisco de Paula Martí en el año 1789.

Pocas novedades conceptuales aportan estos Elementos de Astronomía a los ya explicitados en los Principios homónimos, salvo un mayor desarrollo de los allí tratados hasta alcanzar la extensión suficiente, 816 páginas, que los convierte en un verdadero libro de texto. Su programa lo estructuró en seis grandes bloques: 1) Estrellas fijas, 2) Sol, 3) Planetas principales, 4) Planetas secundarios¹¹⁹, 5) Eclipses y 6) Cometas. Antes de adentrarse en el estudio de la astronomía esférica, se detuvo Bails en explicar la graduación sexagesimal de la circunferencia y la relación existente entre los segundos y los radianes (“las partes del radio”). Inmediatamente después dedicó un amplio apartado a la trigonometría plana y a la esférica, deduciendo varias de sus fórmulas más características. Igual de destacable es el que dedicó a la geometría de la elipse: “la proyección ortográfica de un círculo inclinado”. Además de concretar los teoremas de Apolonio¹²⁰, hizo lo propio con ciertas secciones oblicuas del elipsoide terrestre, indicando que “la sección de un esferoide elíptico es semejante a la elipse del meridiano, con tal que el plano de dicha sección sea perpendicular al plano del ecuador”.

Temario de los ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA	
1. <i>Introducción</i>	2. <i>Preliminares</i>
3. <i>Del cálculo de las partes sexagesimales</i>	4. <i>Proposiciones trigonométricas</i>
5. <i>Algunas propiedades de la elipse</i>	6. <i>De los círculos de la esfera</i>
7. <i>Hallar la altura del polo por medio de las estrellas circumpolares</i>	8. <i>Trazar una línea meridiana</i>
9. <i>Del tiempo</i>	10. <i>De las longitudes y latitudes geográficas</i>
11. <i>De la esfera recta, oblicua y paralela</i>	12. <i>De los Antípodas</i>
13. <i>Del sistema del mundo</i>	14. <i>Satisfácense los argumentos que se fundan en algunos textos de la Sagrada Escritura</i>
15. <i>Explica felicísimamente el sistema copernicano todos los fenómenos celestes</i>	16. <i>De la refracción astronómica</i>
17. <i>De las refracciones terrestres</i>	18. <i>De los crepúsculos</i>
19. <i>De la paralaje</i>	20. <i>De las estrellas fijas</i>
21. <i>De las estrellas nuevas y variables de la vía lactea, de la luz zodiacal</i>	22. <i>De la construcción de globos y mapas celestes</i>
23. <i>Método exacto para hallar la ascensión recta de un astro</i>	24. <i>Variación de la longitud de estrellas, o precesión de los equinoccios</i>
25. <i>Disminución de la oblicuidad de la eclíptica</i>	26. <i>Otros usos de las ascensiones rectas</i>

¹¹⁹ Bails llamaba así a los satélites de los anteriores, a los “que siguen y acompañan...de los cuales parece que tienen alguna dependencia”.

¹²⁰ 1º) La suma de los cuadrados de los semidiámetros conjugados es constante e igual a la suma de los cuadrados de los semiejes de la elipse, 2º) El área del paralelogramo construido sobre los diámetros conjugados es constante e igual a la del rectángulo construido sobre los ejes de la elipse.

27. Hallar la hora del paso de un astro por diferentes meridianos	28. Hallar el ángulo horario de un astro
29. Del orto, o nacimiento, y ocaso de los astros	30. Hallar la hora que es por medio de la altura del Sol o de una estrella
31. Hallar para una hora dada la altura del Sol o de una estrella	32. Hallar el ángulo paraláctico de un astro para una hora dada
33. Hallar el acimut de un astro para una hora dada	34. Hallar el ángulo de posición de un astro
35. De la aberración de las estrellas	36. De la nutación
37. De la paralaje anua de las estrellas fijas	38. De la distancia y magnitud de las estrellas fijas
39. Del Sol	40. Del movimiento del Sol
41. Del año	42. Del movimiento del Sol en ascensión recta
43. Determinar cuanto tiempo gasta el Sol en atravesar el meridiano, el vertical y el horizonte	44. Del método de las alturas correspondientes
45. Ecuación de las alturas correspondientes	46. Hallar el tiempo verdadero de una observación
47. Ecuación de tiempo, o diferencia entre el tiempo verdadero y el tiempo medio	48. Diferencia entre las horas solares verdaderas, y las horas solares medias
49. De la paralaje del Sol y de su distancia a la Tierra	50. De las manchas del Sol y de su rotación De los planetas primarios
51. Teórica de los planetas primarios vistos desde la Tierra	52. De la inclinación de las órbitas planetarias
53. Efectos de la inclinación de las órbitas planetarias respecto de la Tierra	54. De las longitudes y latitudes geocéntricas de los planetas
55. Duración de la revolución de los planetas primarios y movimiento medio de cada uno de ellos	56. De las ecuaciones seculares que se han de aplicar a los movimientos medios de Júpiter y Saturno
57. Regreso de los planetas a la misma situación respecto de la Tierra	58. De las estaciones y retrogradaciones de los planetas
59. Leyes de los movimientos de los planetas primarios, vistos desde el Sol	60. De la figura de las órbitas planetarias
61. Teórica del movimiento eclíptico de los planetas alrededor del Sol	62. Hipótesis elíptica simple
63. De la ecuación máxima	64. Métodos para determinar el lugar del afelio de un planeta
65. Hallar el movimiento de los ápsides y la revolución anomalística de un planeta por las observaciones	66. Hallar las épocas de las longitudes medias de los planetas
67. Nudos e inclinaciones de los planetas	68. De los diámetros aparentes de los planetas
69. De la rotación y figura de los cinco planetas principales	70. Del anillo de Saturno
71. De la aberración de los planetas	72. De los planetas secundarios
73. De la Luna	74. De las fases de la Luna
	76. De las cuatro grandes desigualdades de la Luna
	78. De los nudos y de la inclinación de la

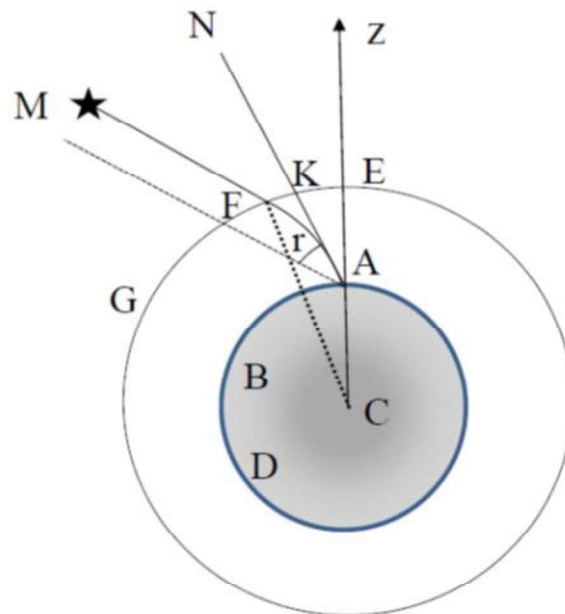
75. <i>De la revolución de la Luna</i>	<i>órbita lunar</i>
77. <i>Aceleración del movimiento de la Luna</i>	80. <i>Del diámetro de la Luna</i>
79. <i>Del periodo caldeo de doscientos veinte, y tres lunaciones</i>	82. <i>Paralaje de la Luna</i>
81. <i>Movimiento horario de la Luna</i>	84. <i>De la libración de la Luna</i>
83. <i>Ecuación de la paralaje en el esferoide aplanado</i>	86. <i>Desigualdades de los satélites</i>
85. <i>De los satélites de Júpiter</i>	88. <i>De los nudos de los satélites</i>
87. <i>De las inclinaciones de los satélites</i>	90. <i>De las configuraciones de los satélites y del efecto de la paralaje anual</i>
89. <i>De los satélites de Saturno</i>	92. <i>De los eclipses de Sol</i>
91. <i>De los eclipses</i>	94. <i>Como se hallan las fases de un eclipse de Sol o de estrellas con regla y compás</i>
93. <i>Método para determinar las fases de un eclipse de Sol por medio de las proyecciones</i>	96. <i>Como se calcula la proyección</i>
95. <i>Método para calcular rigurosamente los eclipses sujetos a paralajes</i>	98. <i>Como se calculan los eclipses por medio de los ángulos paralácticos</i>
97. <i>Como se calculan los eclipses por el nonagésimo</i>	100. <i>Pasos de Mercurio y Venus por el disco del Sol</i>
99. <i>Como se calcula el camino de la sombra sobre la superficie de la Tierra</i>	102. <i>Explicación de una figura con la cual se pueden hallar sin cálculo ninguno todos los efectos de la paralaje en los pasos de Venus respecto de todos los países de la Tierra</i>
101. <i>Como se calculan las circunstancias del paso de Venus y Mercurio por el disco del Sol</i>	104. <i>Método para observar un paso de Venus o Mercurio por el disco del Sol, e inferir de las observaciones todas las consecuencias a que dan lugar</i>
103. <i>De la entrada y salida de Venus, respecto de diferentes partes de la Tierra</i>	106. <i>De los eclipses de Luna</i>
105. <i>De los eclipses de satélites</i>	108. <i>Eclipses de los satélites de Júpiter</i>
107. <i>Como se hallan las fases de un eclipse de Luna</i>	110. <i>De los cometas</i>
109. <i>Efectos que causa el aplamamiento de Júpiter en la duración de los eclipses</i>	112. <i>Cálculo de la órbita de un cometa por tres observaciones</i>
111. <i>Del movimiento de los cometas en una órbita parabólica</i>	
113. <i>Del regreso de los cometas</i>	

El epígrafe dedicado a la refracción astronómica fue en el primero que incorporó Bails información complementaria a la ya recogida con anterioridad. Con ella probó que estaba muy al tanto de las investigaciones realizadas sobre el particular por sus eminentes contemporáneos: Bradley, Simpson y Bouguer. Bradley fue el astrónomo que inició el estudio sistemático del problema, que tanta repercusión tenía en la práctica de la astronomía. La razón resultaba obvia: la corrección consiguiente era mayor que cualquier otra, de manera que todos los cálculos que pretendían hallar

la posición de una estrella sobre la esfera celeste serían infructuosos si no se tuviese en cuenta. Bradley propuso una fórmula empírica en la que ya contempló la variación de la altitud, así como los cambios en la densidad y temperatura de la atmósfera. La base de su ley de refracción era que el valor medio de la corrección estaba relacionada, en cierto modo, con la distancia cenital observada, aunque se necesitasen para su concrección otros factores atmosféricos. Fruto de sus trabajos fue la fórmula siguiente:

$$r = \frac{a}{29.6} \operatorname{tg} (\zeta - 3r) 57' \frac{400}{(350 + h)},$$

en la que a es la altura barométrica en pulgadas, ζ es la distancia cenital observada o aparente, h es la lectura del termómetro de Fahrenheit, 29.6 indica la altura estándar del barómetro y $57''$ la refracción estimada para una distancia cenital de 45° . Otra forma más simplificada de obtener esa corrección sería a partir de la expresión $\operatorname{tg} A.r = B \operatorname{tg} (\zeta - A.r)$, siendo A y B sendas constantes a determinar experimentalmente.



El rayo luminoso, procedente de la estrella M, alcanza la atmósfera terrestre en el punto F y se refracta hasta alcanzar al observador localizado en A.

Bradley se valió para ello de la serie de observaciones efectuadas a las estrellas circumpolares, durante un periodo de tres años, desde un cuadrante mural de Greenwich orientado al Norte, además de las de otras estrellas más meridionales y del Sol, con idéntico instrumento pero orientado al Sur. Bails explicó el método seguido por Bradley para llegar a

la versión más simplificada, manifestando que según ella “la refracción es como la tangente de la distancia al cenit quitándole tres veces la refracción”. También señalaba este, de acuerdo con las hipótesis del astrónomo, que “la refracción siempre es la séptima parte del ángulo en el centro de la Tierra¹²¹, que abraza el trecho que el rayo ha andado en la atmósfera”.

Valores medios de la refracción según T. Simpson					
Altura	Corrección	Altura	Corrección	Altura	Corrección
0°	33' 0''	17°	2' 50''	38°	1' 7''
1	23 50	18	2 40	40	1 2
2	17 43	19	2 31	42	0 58
3	13 44	20	2 23	44	0 54
4	11 5	21	2 16	46	0 50
5	9 10	22	2 9	48	0 47
6	7 49	23	2 31	50	0 44
7	6 48	24	1 57	52	0 41
8	5 59	25	1 52	54	0 38
9	5 21	26	1 47	56	0 35
10	4 50	27	1 42	58	0 32
11	4 24	28	1 38	60	0 30
12	4 2	29	1 34	65	0 24
13	3 43	30	1 30	70	0 19
14	3 27	32	1 23	75	0 14
15	3 13	34	1 17	80	0 9
16	3 1	36	1 12	85	0 4 1/2

Tanto Bradley como su compatriota, el matemático Thomas Simpson, basaron sus modelos refractivos en un concepto gravitatorio, la fuerza de gravedad central, y no en la supuesta materia refractiva. Simpson analizó este fenómeno dentro de sus brillantes disertaciones matemáticas¹²², como una ingeniosa aplicación del cálculo diferencial¹²³ y suponiendo que la densidad atmosférica decrecía uniformemente con la altitud. Como resultado de sus trabajos compuso la tabla de refracciones medias que se acompaña, cuyos valores se obtuvieron a partir de una fórmula análoga a la que aquí se indica¹²⁴: $M \sin \zeta = \sin (\zeta - N r)$. Habiendo determinado previamente los valores de las dos constantes M y N, creyó Simpson que de ese modo se podrían evaluar perfectamente las refracciones medias hasta

¹²¹ El ángulo FCA de la figura adjunta.

¹²² *Mathematical Dissertation on a Variety of Physical and Analytical Subjects* (1743).

¹²³ *A Determination of the Refraction which a Ray of Light suffers in its Passage to the Earth*.

¹²⁴ A partir de ella se podía obtener la versión más simplificada de la fórmula de Bradley, sumándole y restándole la identidad $\sin \zeta = \sin \zeta$ para luego dividir entre sí las dos ecuaciones resultantes.

distancias cenitales de 85º, esto es muy próximas al horizonte. Para Bails no era clara la elección: “la regla de Bradley es más fácil de estamparse en la memoria, y se supone con más sencillez que la regla de Simpson, pero no es tan acomodada como esta cuando se trata de construir una tabla por medio de las observaciones, porque supone que se conozca de antemano la refracción que se busca”.

Bails refirió ampliamente la contribución del geómetra francés Pierre Bouguer, no en vano fue el autor del mejor análisis sobre la refracción efectuado en su siglo. Suyo fue el trabajo *De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres*, con el que ganó el concurso convocado por la Academia de Ciencias para el año 1729. En él compaginó con singular maestría la astronomía y la óptica, deduciendo la ley fundamental (ley de Bouguer) que debería cumplir la refracción atmosférica: $n \cdot r \cdot \sin i = \text{cte}$; siendo n el índice de refracción, r la corrección correspondiente e i el ángulo de incidencia, formado por el rayo óptico con la vertical. Partiendo de que el espesor de la atmósfera es mucho menor que el radio de la Tierra y de que el índice de refracción es próximo a 1.003 se puede deducir una expresión simple de la corrección, dada por la fórmula:

$$r = \frac{(n - 1) \sin i}{\left[\frac{2h}{R} + \cos^2 i \right]^{1/2}}$$

Se constata por lo tanto que en el cenit $r = 0$, ya que i valdría 0° , mientras que en las proximidades del horizonte, con $i \approx 90^\circ$, valdría alrededor de $0^\circ.31$.

En varias partes de su trabajo se preguntaba Bouguer si el origen de la desviación del rayo sería la propia atmósfera o bien una materia desconocida, la llamada materia refractiva, que también había sido considerada por los investigadores ingleses. Sin embargo pronto dejó de ser una cuestión relevante, a raíz de que Bouguer enfocara el problema de la refracción a la luz del cálculo diferencial e integral. Se asistió a partir de entonces a un enfoque verdaderamente novedoso en el que importaba poco la existencia o no de la materia refractiva, pues lo realmente importante fue su caracterización matemática¹²⁵. La segunda parte de la Memoria, con la que consiguió el premio, la dedicó a concretar y a deducir las correcciones

¹²⁵ *Air, lumière et matière réfractive*. Arnaud Mayrarque (2009)

que debían de afectar a las alturas aparentes de los astros, para transformarlas en verdaderas.

Bouguer tuvo ocasión de comprobar su ley y la bondad de sus cálculos en las observaciones que realizó en el virreinato de Perú, con ocasión de la medición del grado de meridiano que auspició la citada Academia. Bails recordaba como obtuvo allí, al nivel del mar, una refracción horizontal de 27' y otra de 5' 30'' para una distancia cenital de 83°, aunque matizara tales resultados: “esta cantidad es menor que en nuestros climas, porque la rarefracción que proviene del calor del aire, hace menores las refracciones por ser entonces menor la densidad del aire”. Durante su estancia americana comprobó Bouguer que la refracción variaba con la altitud, ya que en la estación del Chimborazo (2388 toesas) la corrección resultó ser de 19'45'', en la de Pichincha (2044 toesas) de 20'48'' y en la de Quito (1479 toesas) de 22'50''; esto es que la corrección aumentaba a medida que disminuía la altitud, concluyendo así que debería anularse cuando la altitud fuese superior a las 5000 toesas.



Alturas ap.	r	Alturas ap.	r	Alturas ap.	r
Grados	Min. y seg.	Grados	Min. y seg.	Grados	Seg.
0	33	31	1 47	61	35
1	25 20	32	1 43	62	34
2	19 47	33	1 39	63	32
3	15 50	34	1 35	64	30
4	13 1	35	1 32	65	29
5	10 58	36	1 29	66	28
6	9 25	37	1 26	67	27
7	8 5	38	1 23	68	26
8	7 18	39	1 20	69	25
9	6 3	40	1 17	70	24
10	5 55	41	1 15	71	22
11	5 24	42	1 12	72	21
12	4 57	43	1 9	73	20
13	4 35	44	1 6	74	19
14	4 15	45	1 4	75	17
15	3 58	46	1 2	76	16
16	3 41	47	1 0	77	15
17	3 29	48	58	78	13
18	3 17	49	56	79	12
19	3 6	50	54	80	11
20	2 56	51	52	81	10
21	2 47	52	50	82	9
22	2 39	53	48	83	8
23	2 32	54	46	84	7
24	2 25	55	45	85	6
25	2 18	56	43	86	4
26	2 12	57	42	87	3
27	2 6	58	40	88	2
28	2 1	59	38	89	1
29	1 56	60	37	90	0
30	1 52				

Estudio de Pierre Bouguer sobre la refracción astronómica, con el ganó el premio convocado a tal fin por la Academia de Ciencias de París. Se presenta también la tabla que incluyó en el mismo, con los valores de las correcciones relativos a las alturas aparentes u observadas. Téngase en cuenta que las alturas sobre el horizonte y las distancias cenitales son ángulos complementarios.

Las constelaciones fue otro de los apartados que resultó sustancialmente ampliado en esta nueva obra astronómica de Bails. Una de las informaciones más relevantes que aportó fue un cuadro con las horas en que pasaban por el meridiano de París “las principales estrellas¹²⁶ el primer día de cada mes”, indicando además la altura alcanzada por cada una de ellas en tal instante. La importancia del cuadro resultaba obvia, puesto que conociendo la diferencia de longitudes geográficas entre una cierta estación astronómica y el Observatorio de París, podría deducirse la hora de paso por el meridiano del lugar considerado; en tal caso, si se dispusiera de un reloj de tiempo sidéreo, la hora marcada por el mismo coincidiría con la ascensión recta de la estrella en cuestión.

Bails describió todas las constelaciones de su listado valiéndose del método de las alineaciones. De entre todas ellas se ha seleccionado la correspondiente a la Casiopea¹²⁷, por su indudable interés cuando se pretende localizar la estrella polar y la dirección del Norte geográfico: “Casiopea es una constelación directamente opuesta a la Osa mayor respecto de la estrella polar, de modo que la línea o el círculo que va desde el medio de la Osa Mayor,..., por la estrella polar, va a dar en medio de Casiopea al otro lado del polo. Compónese esta constelación de seis o siete estrellas que forman una y, o tienen la figura de una silla trastornada”.

Es igualmente destacable la explicación que dio Bails para situar el Polo Norte de la eclíptica: “el polo boreal de la eclíptica está en la constelación del Dragón, en la línea tirada por las dos estrellas γ y δ de la Osa mayor, y forma un triángulo casi equilátero con la Lira y α del Cisne... Finalmente, el polo de la eclíptica forma un triángulo rectángulo e isósceles con la estrella polar y β de la Osa menor, que es la más septentrional de las dos últimas de la Osa menor, estando el ángulo recto en la estrella β ”.

Bails recordó también una circunstancia poco conocida pero básica para comprender mejor la iconografía celeste:

“...hay una gran diferencia entre los mapas celestes de los modernos y de los antiguos, estos solían pintar el cielo conforme le veríamos si le miráramos desde más allá de su convexidad; pero los modernos le pintan

¹²⁶ Aldebarán, La Cabra, α de Orión, Sirio, Procyon, Régulo, La Espiga, Arturo, Antares, La lira y Fohamante. Asimismo figuraba la hora en que culminaba el equinoccio.

¹²⁷ En la mitología griega se suponía que era hija de Arabio, epónimo de Arabia, esposa de Cefeo y madre de Andrómeda.

en sus mapas conforme le vemos mirándole desde la Tierra, esto es, en su concavidad, resulta de aquí que para enterarse de las constelaciones, son más acomodados los mapas que los globos celestes, porque como los globos pintan la convexidad del cielo, es preciso que nos figuremos que estamos en una situación opuesta a la que estamos cuando miramos el cielo”.



La constelación de Casiopea en el Firmamentum Sobiescianum Sive Uranographia (Johannes Hevelius. 1687) y en un mapa celeste moderno.

Bails retomó la difícil cuestión de las correcciones astronómicas, detallando las variaciones de las coordenadas eclípticas de las estrellas a causa de la precesión equinoccial. Su declaración de intenciones es manifiesta: “el movimiento general de la precesión se hace alrededor de los polos de la eclíptica, de modo que no ocasiona variación alguna en la latitud de las estrellas, conforme lo atestigua la observación. Resulta de este movimiento de la longitud de las estrellas, que varían su ascensión recta y su declinación; pero como esta variación no es la misma respecto de todas las estrellas, hemos de declarar como se averigua la precesión en ascensión recta y en declinación, que es un punto muy esencial”.

Para lograrlo se apoyó en las relaciones trigonométricas que ligaban las coordenadas anteriores, partiendo de que “es más fácil de determinar la precesión correspondiente a un corto espacio de tiempo, considerando arcos que se suponen infinitamente pequeños, vamos a declarar como se ejecuta esta determinación”. Partiendo de las fórmulas ya citadas se pueden obtener, a partir de sus relaciones diferenciales, las que se exponen a continuación:

$$d\delta = \cos \eta \, d\beta + \sin \varepsilon \cos \alpha \, d\lambda + \sin \alpha \, d\varepsilon,$$

$$\cos \delta \, d\alpha = - \sin \eta \, d\beta - \sin \delta \cos \alpha \, d\varepsilon + \cos \beta \cos \eta \, d\lambda,$$

siendo η el ángulo paraláctico; ecuaciones que permitirían calcular la precesión en declinación ($d\delta$) y en ascensión recta ($d\alpha$).

Con la simplificación introducida por Bails, los cálculos correspondientes resultaron más sencillos. Efectivamente, en tales casos podrían despreciarse las variaciones de latitud ($d\beta$) y de la oblicuidad de la eclíptica ($d\varepsilon$), y aplicar las fórmulas transformadas¹²⁸:

$$d\delta = \sin \varepsilon \cos \alpha \, d\lambda \text{ y } d\alpha = [\cos \beta \cos \eta / \cos \delta] \, d\lambda.$$

La simplificación podía ser aún mayor si el intervalo de tiempo considerado no fuese muy amplio, pues en tal caso la variación $d\lambda$ podría suponerse proporcional al tiempo, $d\lambda = \Delta \tau$. Si se eliminase además el ángulo paraláctico (η), las variaciones en ascensión recta y en declinación serían:

$$\alpha' - \alpha = (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \tan \delta) \Delta \tau,$$

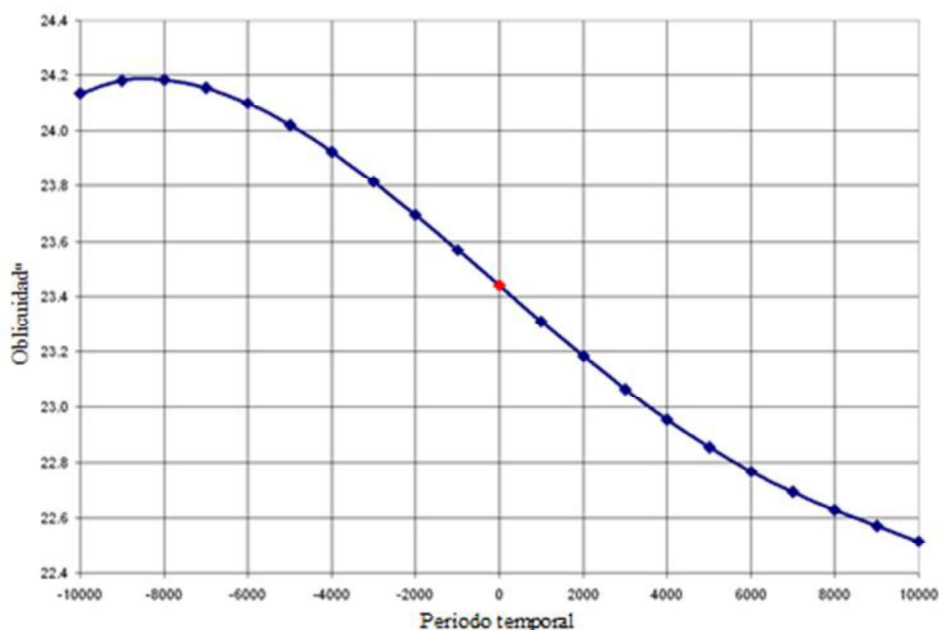
$$\delta' - \delta = \sin \varepsilon \cos \alpha \Delta \tau,$$

en donde (α, δ) son las coordenadas al comienzo del intervalo y (α', δ') las de la misma estrella, al final del mismo. Bails matizaba esta cuestión en los siguientes términos:

“la precesión en ascensión recta y declinación, conforme la hemos hallado, es sensiblemente uniforme en el discurso de diez años, pero en los diez años siguientes puede sobrevenirle un incremento o decremento de medio segundo. Cuando se quisiese determinar la precesión en ascensión recta para mucho tiempo, será preciso calcular la longitud, y después la ascensión recta que la corresponde, o si no se calculará por medio de las

¹²⁸ Bails aclaraba que en realidad esas variaciones no se anulaban: “pero como parece que la oblicuidad de la eclíptica va menguando, es forzoso que varíe la latitud de las estrellas, porque el ángulo que la eclíptica forma con el ecuador no puede menguar, sin que la eclíptica se arrime al ecuador, y se aparte por lo mismo de la estrella, cuya latitud crecerá, pues la latitud de un astro es su distancia a la eclíptica... esta disminución de la oblicuidad de la eclíptica la sacamos de los diferentes valores que de ella se hallan en los Autores que la han observado, porque cotejando unas con otras las determinaciones que de ella conocemos desde los Astrónomos Griegos hasta los del día de hoy, se ve patentemente que esta inclinación ha ido menguando como unos 44'' por siglo, y lo mismo prueban las latitudes de las estrellas de que nos da noticia Tolomeo”.

fórmulas antecedentes el movimiento de diez en diez años, mudando cada vez la ascensión recta y la declinación”.



Variación de la oblicuidad de la eclíptica en 20000 años, según el astrónomo francés Jacques Laskar (1986).

Un caso particular, indicado por Bails, fue el de una estrella en la que el ángulo formado por su círculo horario y por su meridiano eclíptico fuese de 90° . Lo que equivaldría a decir que el ángulo paraláctico sería recto y su coseno nulo, con la consecuencia de que $d\alpha = 0$. El hecho de que se anulara la precesión en ascensión recta le permitió a Bails una digresión geométrica que no carece de interés: “todos esos puntos están en la curva que forman la intersección de un cono oblicuo, cuyos dos lados pasan por los polos de la eclíptica y del ecuador, y cuya base es tangente de la esfera en el uno de los polos, esto es, perpendicular al uno de los lados del cono”.

Longitud	Latitud
0	90° 0'
10	85 41
20	81 34
30	77 44
50	71 36
70	67 47
90	66 32

La tabla adjunta señala respecto de cada longitud por qué grado de latitud pasa dicha curva; determina las estrellas que tiene la mayor paralaje en

declinación, y dentro de ella están las estrellas cuya precesión es negativa, esto es, decreciente mientras crece la longitud.

Después planteó y resolvió Bails una serie de ejercicios de astronomía práctica, de suma utilidad para la navegación. En la resolución de todos ellos se valió de la trigonometría esférica aplicada al triángulo de posición, cuyos vértices fueron el Polo Norte celeste, el Cenit y la propia estrella. No obstante, no conviene olvidar que las fórmulas propuestas por aquel fueron las empleadas en su tiempo, para que se les pudieran aplicar logaritmos. En cualquier caso, la secuencia de la solución del problema sigue anclada a los conceptos ya expuestos de la astronomía de posición.

El primer ejemplo que propuso fue el de “hallar la hora que es por medio de la altura del Sol o de una estrella”. En los dos supuestos se suponía conocida la latitud del lugar, corrigiéndose en la observación del Sol los efectos de la refracción y del semidiámetro, para reducirla al centro del astro. También fue dato de partida la declinación del Sol en el instante de la observación. Aplicando el teorema del coseno¹²⁹ al triángulo anterior se podría obtener el ángulo horario del Sol por medio de la fórmula:

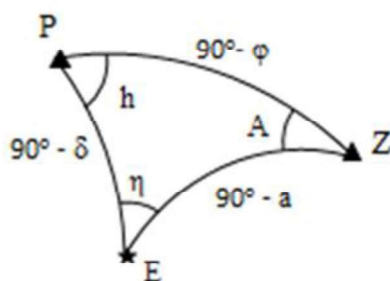
$$\cos h = \frac{\sin a - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Bails apuntaba la precaución que había de tenerse al fijar el valor definitivo del ángulo, distinto si la observación era matutina o vespertina. La cuestión no era baladí, aunque se resolviera sin dificultad, bastaba tener en cuenta que el ángulo horario matutino ha de ser mayor de 180° , 12^h , y el vespertino menor de 180° . Esa sería pues la única ambigüedad que se debería resolver y que recoge la igualdad $\cos h = \cos (180^\circ - h)$. Partiendo luego de que la hora solar sería $12^h + h$, solo se tendrían que sumar las 12^h al valor obtenido para el ángulo horario.

El problema sería ligeramente distinto en el caso de una estrella, aunque también se corregiría la observación por los efectos de la refracción y se calculase el ángulo horario con idéntica fórmula, en función de la latitud, de su declinación y de su altura sobre el horizonte. La diferencia estribaba en la necesidad de calcular el incremento entre la ascensión recta de la

¹²⁹ Igualmente llamado tercera fórmula de Bessel, relaciona los tres elementos del triángulo esférico, de ángulos A, B, C y de lados a, b, y c, mediante la ecuación: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$; las dos restantes se obtienen a través de permutaciones circulares.

estrella y la del Sol, para sumárselo al ángulo horario calculado. Así se habría obtenido el ángulo horario del Sol y por tanto la hora de la observación, después de haberle sumado 12^h .



El triángulo de posición en la astronomía esférica. Sus vértices son el Polo Norte celeste (P), el Cenit (Z) y la estrella (S). Sus lados son arcos del meridiano del lugar (PZ, colatitud), del círculo horario (PE, distancia polar) y del vertical (ZE, distancia cenital); respectivamente complementarios de la latitud (ϕ) de la declinación (δ) y de la altura sobre el horizonte (a). El ángulo en el Polo permite calcular el ángulo horario de la estrella y la hora de la observación. El ángulo en el Cenit permite calcular el acimut de la estrella y el de cualquier referencia del horizonte a través del ángulo horario de la estrella. Finalmente el ángulo de posición, también llamado paraláctico, se usa principalmente para los cálculos de paralaje.

Para fijar sus enseñanzas, resolvió el ejemplo siguiente: “El día 8 de julio de 1761 se observó en alta mar la altura de Régulo¹³⁰, y después de rebajada la refracción se halló la altura verdadera de $20^\circ 6'$ hacia el occidente, a los $32^\circ 12'$ de latitud boreal. Suponiendo la declinación de la expresada estrella de $13^\circ 8'$ ¿Qué hora era entonces?”. La solución es evidente, se trataría de sustituir los valores dados en la fórmula anterior. Procediendo así se llegaría a que $\cos h \approx 2.701024 \text{ E } -1 \Rightarrow h \approx 74^\circ 19'46''.69$, valor que una vez transformado en tiempo se convertiría en $4^h 57^m 19^s.11$. Bails supuso que la diferencia entre las ascensiones rectas de la estrella y del Sol, fue de $2^h 42^m 52^s$, con lo que el horario buscado sería de $7^h 40^m 11^s.11$, o bien de $7^h 40^m 11^s$, tal como él mismo reflejó después de redondear el resultado. La hora verdadera sería por tanto las $19^h 40^m 11^s$, o las $7^h 40^m 11^s$ de la tarde¹³¹.

¹³⁰ La estrella más brillante de la constelación Leo (α Leonis), se encuentra casi sobre la eclíptica, y es una de las cuatro estrellas reales, junto a Aldebarán (α Tauri), Antares (α Scorpii) y Fomalhaut (α Piscis Austrini). Se encuentra a unos 77 años luz.

¹³¹ En el texto original de Bails figura una errata importante que no fue recogida en la fe correspondiente: en lugar de expresar la diferencia de ascensiones rectas en tiempo $2^h 42^m 52^s$, se hizo en graduación

El segundo ejercicio propuesto por Bails fue: “hallar para una hora dada la altura del Sol o de una estrella”. Los datos de partida fueron ahora los siguientes: a) la distancia del Polo al Cenit, es decir la colatitud del lugar o el complemento de la latitud, b) la distancia polar, o distancia del Polo a la estrella, es decir el complemento de su declinación y c) el ángulo horario, deducido evidentemente a partir de la hora. Se conocerían por lo tanto tres elementos del triángulo de posición: dos lados y el ángulo comprendido. Aunque Bails recomendara para su solución el empleo de dos triángulos rectángulos auxiliares, hoy día se resolvería sin dificultad por la tercera fórmula de Bessel: $\sin a = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h$, ya que se pretendería obtener el valor del lado opuesto al Polo y el su complemento a 90° .

El tercer ejercicio planteado fue “hallar el ángulo paraláctico de un astro para una hora dada”. Bails supuso como datos de partida los mismos del caso anterior y utilizó un procedimiento análogo para solucionarlo. En este caso se podrían usar también las analogías de Neper¹³², aplicándolas al triángulo PZE. Con una se obtendría la semisuma de los ángulos A y η , mientras que con la otra se calcularía la semidiferencia de los mismos; de manera que se podría determinar inmediatamente el valor del ángulo η . Bails concluía su propuesta afirmando “este ángulo paraláctico casi siempre es agudo en el cálculo de los eclipses, donde hace mucho papel”.

El penúltimo ejercicio, planteado por Bails, estuvo relacionado con la orientación, en tanto que pretendía hallar el acimut de una estrella para una hora dada. Los datos de partida serían ahora el ángulo horario, la colatitud del lugar y la distancia polar. De nuevo recurrió al empleo de dos triángulos rectángulos auxiliares¹³³ para solucionarlo. Como es obvio, en este caso se podrían aplicar también las analogías anteriores, con la salvedad de que la incógnita sería el acimut, A, en lugar del ángulo paraláctico, η . Conocido el acimut de la estrella, y el de alguna referencia lejana, se podría replantear la línea meridiana y solventar el problema.

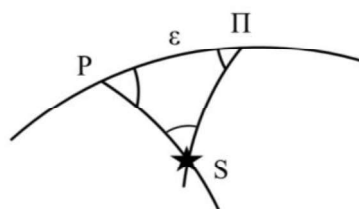
sexagesimal $2^\circ 42'52''$. De haber elegido ese dato, tal cual, el resultado obtenido hubiese sido totalmente distinto.

¹³² Las fórmulas empleadas serían las dos siguientes:

$$\operatorname{tag} \frac{A+\eta}{2} = \frac{\cos \frac{p-c}{2}}{\cos \frac{p+c}{2}} \operatorname{ctg} \frac{H}{2} \text{ y } \operatorname{tag} \frac{A-\eta}{2} = \frac{\sin \frac{p-c}{2}}{\sin \frac{p+c}{2}} \operatorname{ctg} \frac{H}{2}, \text{ donde } p = 90^\circ - \delta \text{ y } c = 90^\circ - \varphi.$$

¹³³ Unos se formaban trazando desde el cenit un arco máximo normal al horario y otros haciendo lo mismo desde la propia estrella al meridiano.

El último ejercicio propuesto fue independiente del lugar, interviniendo un nuevo triángulo esférico, cuyos vértices serían el Polo Norte de la eclíptica (Π), el Polo Norte celeste (P) y una determinada estrella (S). Los lados valdrían, como ya es sabido, la distancia angular entre los dos polos, la distancia polar de la estrella y la colatitud eclíptica. En cuanto a los ángulos en los polos, dependerían de la posición de la estrella con relación a los equinoccios, aunque el del polo de la eclíptica proporcionase la longitud y el del polo del mundo el de la ascensión recta. Bails propuso precisamente calcular el tercer ángulo, en S, que llamó de posición: “por ser un ángulo fijo, que solo pende de la posición del astro respecto de la eclíptica y del ecuador, e indica la posición de los principales círculos que se cortan en el centro de una estrella”.



Lados: PS distancia polar, $90^\circ - \delta$; ΠS colatitud eclíptica, $90^\circ - \beta$

Ángulos: $\Pi = \lambda - 90^\circ$; $P = \alpha - 90^\circ$

S ángulo de posición, dado por $\text{sen } S = \frac{\cos \alpha \text{ sen } \varepsilon}{\cos \beta}$

Cálculo del ángulo de posición en el triángulo esférico PΠS, Π es el polo de la eclíptica

Comentó igualmente que se trataba de un ángulo “que es de mucho recurso en el cálculo de los eclipses”. Bails contempló varias posibilidades para obtenerlo: 1) por medio de la oblicuidad de la eclíptica, de la longitud y de la latitud, 2) sustituyendo la longitud y la latitud por la ascensión recta y la declinación, 3) mediante la oblicuidad, la longitud y la declinación, 4) o bien a través de la oblicuidad, de la ascensión recta y de la latitud. No obstante, al final optó por la última, puesto que así se podría aplicar directamente el teorema del seno y llegar a que $\text{sen } S = \cos \alpha \text{ sen } \varepsilon / \cos \beta$. El resultado no es constante, al influir sobre él las variaciones propias de la oblicuidad y de la ascensión recta, asociadas a la precesión y a la nutación.

El desarrollo del epígrafe dedicado por Bails a la aberración le supuso un gran esfuerzo, que solo pudo sintetizar entre las páginas 235 y 266 de sus Elementos de Astronomía, aunque no lograra transmitir sus innegables

conocimientos con la eficacia y claridad que hubiese deseado¹³⁴. Especialmente interesante fue, en todo caso, la reseña que hizo de los experimentos de J. Bradley, con la estrella γ de la constelación del Dragón:

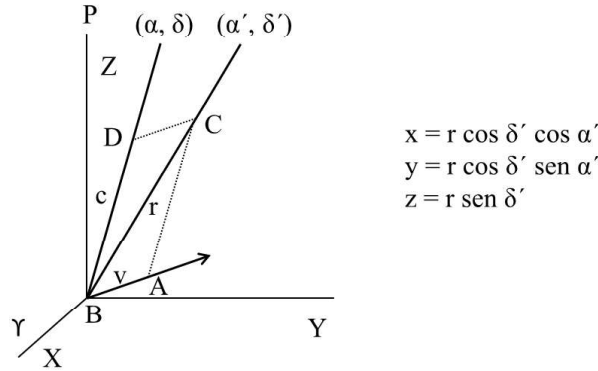
“El célebre astrónomo Bradley observando esta estrella a mediados de diciembre del año 1725 reparó que estaba algo más al Sur que los primeros días del mismo mes, habiéndose acercado todavía más al Sur el día 20 de diciembre. A principios de marzo de 1726 la vio $20''$ distante del sitio donde estaba tres meses antes, y se mantuvo estacionaria algunos días. A mediados de abril pareció que subía hacia el Norte, y a principios de junio pasaba a la misma dirección del cenit que en la primera observación hecha seis meses antes. Su declinación crecía entonces $1''$ en tres días, de lo cual se debía inferir que se iría acercando más al Norte, y así se verificó con efecto. Por el mes de septiembre estaba la misma estrella $20''$ más al Norte que por junio, y $39''$ más que en el mes de marzo; después volvió hacia el Sur, hallándose por diciembre de 1726 a la misma distancia del cenit que el año antecedente, sin más diferencia que la que debía ocasionar la precesión”.

Como explicación de tan singular experiencia, dio la ya conocida: la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol no es del todo despreciable cuando se compara con la de la luz; en otras palabras, la aberración es una clara manifestación de la traslación terrestre. Por su causa todas las estrellas observadas parecen describir sobre la esfera celeste una elipse homóloga a la que recorre la tierra en el plano de la eclíptica. Consiguientemente, la posición aparente de la estrella, E' , definida por el par de coordenadas ecuatoriales (α', δ') deberá ser trasladada, por medio de una cierta corrección $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$, a la posición verdadera, E , localizada mediante el par (α, δ) ; naturalmente $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ y $\Delta\delta = \delta' - \delta$.

En la figura adjunta se representa el paralelogramo convencional BACD, también usado por Bails, cuyo lado mayor sería la velocidad de la luz, c , y el menor la de la Tierra, v . Bails llamó al triángulo CBA, triángulo de aberración, “fórmale el camino de la luz con el de la Tierra, siendo el angulillo C la medida de la aberración”. La composición de ambos es la resultante r , que define la dirección en que se encuentra la estrella imaginaria E' en un cierto instante. En ese sistema de referencia

¹³⁴ Hay ciertos conceptos propios de las ciencias exactas que requieren planteamientos en los que primen más el puro análisis matemático que una forzosa descripción literal.

trirrectangular, el plano XY coincidiría con el del ecuador celeste, el eje de abscisas sería la línea equinoccial, el eje de ordenadas tendría una ascensión recta de 90° y el eje de las zetas sería el eje del mundo.



El vector aberración y sus componentes, en función de las coordenadas ecuatoriales observadas o aparentes.

En todo el proceso de cálculo será fundamental la intervención de las coordenadas ecuatoriales y eclípticas del Sol. Por otro lado se considerarán constantes la oblicuidad, ϵ , y el radio R de la órbita terrestre, ya que de ese modo se simplificarán todas las expresiones sin que se ocasionen errores sensibles, dada la variación tan lenta de la primera y la excentricidad tan pequeña de la segunda¹³⁵. Calculadas las coordenadas cartesianas de los cuatro vértices del paralelogramo de aberración, como lo identificaba Bails, se llegaría, tras sucesivas transformaciones, a las dos expresiones siguientes¹³⁶:

$$\Delta\alpha'' = - (Rd\lambda_S/c \, dt) (1/\cos \delta) [\cos \lambda_S \cos \epsilon \cos \alpha + \sin \lambda_S \sin \alpha],$$

$$\Delta\delta'' = - (Rd\lambda_S/c \, dt) [-\cos \lambda_S \cos \epsilon \sin \alpha + \sin \lambda_S \cos \alpha \sin \delta + \cos \lambda_S \sin \epsilon \cos \delta],$$

siendo λ_S la longitud geocéntrica del Sol. Tales fórmulas pueden considerarse rigurosas siempre que la declinación se aproxime lo suficiente a los 90°, para que su coseno tienda a cero¹³⁷. El cociente $Rd\lambda_S/c \, dt$ es justamente la denominada constante de aberración, para su cálculo se solían

¹³⁵ Se estima que es aproximadamente igual a 0,016 710 22, casi cinco veces mayor que la del meridiano terrestre.

¹³⁶ El lector interesado puede recurrir a cualquier tratado riguroso de astronomía esférica. Para la redacción de este apartado se han consultado los dos clásicos siguientes: *Tratado de Astronomía* de F. Brünnow (1869) e *Introducción a la Astronomía* de R. M. Aller (1945).

¹³⁷ En tanto que la declinación sea menor de 85° 30', $\Delta\alpha$ es menor de 0°.01 e $\Delta\delta$ no es mayor que 0''.01 salvo que las declinaciones superen los 85° 6', de manera que todos los términos de segundo orden podrían considerarse despreciables para todas las estrellas, con la excepción de la polar.

emplear determinaciones muy exactas de la declinación de una misma estrella. En la historia de la astronomía moderna han sido muchos los astrónomos¹³⁸ que han obtenido su valor, estimándose en la actualidad que es del orden de los 20''.4955. De acuerdo con él, las ecuaciones anteriores se transformarían en estas otras:

$$\Delta\alpha'' = - (20''.5 / \cos \delta) [\cos \lambda_S \cos \varepsilon \cos \alpha + \sin \lambda_S \sin \alpha],$$

$$\Delta\delta'' = - 20''.5 [- \cos \lambda_S \cos \varepsilon \sin \alpha + \sin \lambda_S \cos \alpha \sin \delta + \cos \lambda_S \sin \varepsilon \cos \delta],$$

El procedimiento para cuantificar los efectos de la aberración sobre las coordenadas eclípticas de una estrella, sería en todo análogo al anterior, aunque cambiase ligeramente el sistema de referencia elegido, pues el plano fundamental sería ahora el de la eclíptica y el eje de las zetas su eje polar, con la simplificación añadida de que se anularía la oblicuidad. Quiere esto decir que las fórmulas resultantes serían semejantes a las ya expuestas, pero sustituyendo los pares (α', δ') y $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$, por (λ', β') y $(\Delta\lambda, \Delta\beta)$, entendiendo que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ y $\Delta\beta = \beta' - \beta$; en efecto:

$$\Delta\lambda'' = - (20''.5 / \cos \beta) [\cos \lambda_S \cos \lambda + \sin \lambda_S \sin \lambda]$$

$$= - (20''.5 / \cos \beta) \cos (\lambda - \lambda_S),$$

$$\Delta\beta'' = - 20''.5 \sin \beta \sin (\lambda - \lambda_S).$$

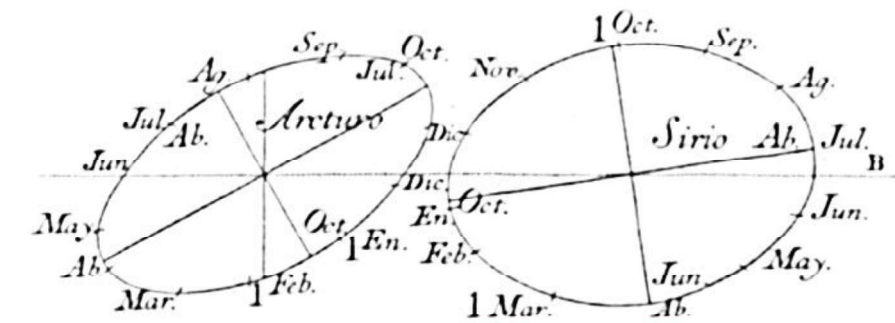
En el supuesto de que fuese el Sol la estrella considerada, se simplificarían considerablemente las fórmulas anteriores, pues $\lambda = \lambda_S$ y $\Delta\beta = 0$. Por otro lado al ser β siempre menor de 1'' se podría suponer que $\cos \beta \approx 1$, con lo que $\Delta\lambda'' = - 20''.5$, lo que se traduce en que la aberración en longitud sería máxima.

La constatación analítica de que la trayectoria anual y aparente de las estrellas observadas es una elipse resulta inmediata. Ciertamente, multiplicando la primera de las dos últimas ecuaciones por $\cos \beta$, dividiendo la segunda por $\sin \beta$, elevando los dos resultados al cuadrado y sumándolos se llegaría a la expresión:

$$\left[\frac{\Delta\lambda'' \cos \beta}{20''.47} \right]^2 + \left[\frac{\Delta\beta''}{20''.47 \sin \beta} \right]^2 = 1,$$

¹³⁸ Sobresaliendo los nombres de Delambre, 20''.255, W. Struve, 20''.445 y S. C. Chandler, 20''.52.

que es la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas, siendo $\Delta\lambda \cos\beta$ la abscisa e $\Delta\beta$ la ordenada. Es inmediato que el semieje mayor es de $20''.47$ y el menor de $20''.47 \sin \beta$.



Elipses de aberración de las estrellas Arturo y Sirio. Ilustración de los Elementos de Astronomía de Benito Bails.

Bails se refirió a esta elipse, reproduciéndola incluso en su trabajo, “por consiguiente cada estrella anda en virtud de la aberración una elipse...cuyo eje mayor es paralelo a la eclíptica, y coge $40''$ de largo”. Más adelante ilustró su exposición con las elipses correspondientes a las estrellas de Arturo y Sirio:

“Arturo está en el extremo occidental del eje mayor de su elipse a la derecha, el día 13 de octubre, que es el de su conjunción¹³⁹; está en el extremo inferior o meridional del eje menor, a 11 de julio que es el día de su primera cuadratura. Sirio al contrario está en el extremo superior o boreal del eje menor de su elipse, a 3 de octubre, día de su primera cuadratura; porque las estrellas siempre parecen lo más cerca de la eclíptica tres meses después de su conjunción, las estrellas boreales están entonces al mediodía y las estrellas australes están al Norte”.

Bails detalló, por otra parte, los aspectos de la elipse en algunas situaciones extremas: “la elipse de aberración es tanto más abierta, cuanto más distan de la eclíptica las estrellas; formando un círculo de $40''$ de diámetro para una estrella que está en el polo mismo de la eclíptica, después el semieje menor va menguando como el seno de la latitud; finalmente dicha elipse es infinitamente angosta, y se reduce a una línea...para las estrellas que están

¹³⁹ Dos estrellas están en conjunción, vistas desde la Tierra, cuando tienen la misma longitud. Si su diferencia es de 180° se dice que están en oposición. Finalmente si la diferencia es de 90° se dice que están en cuadratura.

en la misma eclíptica”; tales comentarios tiene su justificación analítica haciendo que β varíe de 90° a 0° en la ecuación general de la elipse ya referida. Al no disponer de medios de cálculo suficientemente potentes se formaron tablas de aberración, que permitían obtener, por interpolación, las correcciones oportunas. De entre todas ellas me permito reseñar las preparadas por Gauss, que publicó por primera vez en 1808: *Monatliche Correspondenz, Band XVII*, aunque usara la constante calculada por Delambre. Bails concluyó su exposición con un cuadro, reproducido a continuación, en el que vació las correcciones máximas, en ascensión recta y declinación, para “las diez principales estrellas del cielo”.

Nombres de las estrellas	Lugar del Sol al tiempo de la aberración máxima en ascensión recta para 1750			La aberración máxima en ascensión recta			Lugar del Sol al tiempo de la aberración máxima en declinación			La aberración máxima en declinación		
Estrella polar.	0°	11°	38'	8'	38''	4	3°	8°	48'	19''	9	
Aldebaran.	2	7	10	0	20	6	1	6	46	3	8	
La Cabra.	2	15	43		28	5	5	1	36	8	1	
Sirio.	3	7	48		20	8	6	3	45	12	8	
Régulo.	4	26	28		19	3	10	25	3	6	8	
La Espiga de Virgo.	6	19	30		18	6	6	25	14	7	6	
Arcturo.	7	33	15		20	1	5	0	55	12	4	
Antares.	8	5	24		21	8	8	29	40	3	9	
La Lira.	9	6	33		25	5	0	5	1	17	6	
El Aguila.	9	22	48		19	9	0	6	37	10	3	

Cuadro formado por Bails para indicar los valores extremos de las correcciones por refracción para las diez principales estrellas del cielo.

Ya fue comentado que cuando Bradley estudió el fenómeno de la aberración, descubrió otro fenómeno más sutil pero igualmente singular, que luego sería denominado nutación. Bails recogió, también en esta ocasión, un resumen cronológico con la gestación el descubrimiento:

“Observó Bradley...que la variación anua de la declinación de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios era mayor de lo que prometía la precesión de los equinoccios suponiéndola de $50''$..., la estrella η de la Osa mayor se hallaba en el mes de septiembre de 1728, $20''$ más al Sur que el año antes, siendo así que no debía estar más que unos $18''$. Y en general, la declinación de las estrellas inmediatas al coluro de los equinoccios había variado unos $2''$ más de lo que correspondía a la precesión media de los

equinoccios, que está muy bien averiguada, y la de las estrellas inmediatas al coluro de los solsticios, había variado menos de lo que debiera”.

Asimismo, ya había observado en el año anterior, a través de la variación de las declinaciones de las estrellas próximas al coluro equinoccial, que la precesión de los equinoccios era mayor que la media, mientras que en las que se localizaban cerca del coluro de los solsticios parecía que se movían en sentido contrario a los efectos de este incremento. Bails añadía que “en las estrellas opuestas en ascensión recta se experimentaba lo mismo, γ del Dragón, y la 35ª del Camaleopardo habían padecido la misma variación de declinación, la una hacia el Norte, la otra hacia el Sur. Estos fenómenos se componían grandemente con una nutación del eje de la Tierra, que debe causar la misma diferencia en las estrellas opuestas en ascensión recta”.

Antes de adentrarse en la cuantificación de sus efectos sobre las coordenadas ecuatoriales y eclípticas, trató de explicar con detalle las componentes de dicho movimiento. El problema se origina por una mutabilidad de los planos fundamentales: el del ecuador celeste y el de la eclíptica, que se traduce en un movimiento periódico de la línea equinoccial y en una variación también periódica de la oblicuidad¹⁴⁰. Al primero se le denomina nutación en longitud y al segundo nutación de la oblicuidad. De no producirse semejante fenómeno, la línea equinoccial solo estaría sometida a la precesión¹⁴¹ y sus intersecciones con la esfera celeste serían los equinoccios medios, al igual que la oblicuidad en tal supuesto sería también media. En realidad los puntos equinocciales instantáneos son verdaderos o aparentes, como la oblicuidad recibe también el calificativo de verdadera o aparente.

La nutación depende de la posición relativa de la Tierra, el Sol y la Luna. Su cuantificación es extremadamente prolija y complicada, siendo sus principales variables la longitud del nodo ascendente¹⁴² de la órbita lunar (λ_{NA}), la propia longitud de la Luna y la longitud media de un Sol ficticio

¹⁴⁰ Bails indicaba que este efecto era el más fácil de percibir “este ángulo crece 9'' cuando el nodo ascendente de la Luna está en Aries, porque entonces...la distancia de los polos...es 9'' mayor que cuando está en Libra”.

¹⁴¹ Bails pospuso el desarrollo de la precesión, para realizarlo una vez estudiado el fenómeno de la gravitación; ambos conceptos los abordó en el tomo VIII de sus Elementos de Matemática, tal como se verá en el apartado siguiente de este mismo capítulo.

¹⁴² La órbita lunar corta al plano de la eclíptica según la línea nodal, cuyas intersecciones con la esfera celeste serían los llamados nodos. Los nodos pueden ser ascendentes o descendentes, en el primero la latitud eclíptica de la Luna pasa de ser negativa a positiva, en cambio en el descendente la latitud pasaría de positiva a negativa.

(λ_{SF}) que se mueve sobre la eclíptica con velocidad uniforme. Bails comentaba que “los nodos de la Luna se mueven alrededor de la eclíptica “con un movimiento retrógrado que dura 19 años, hallándose al cabo de ese tiempo el nodo ascendente en el mismo punto de la eclíptica donde estaba cuando empezó este periodo”. La nutación en longitud suele ser considerada como un elemento diferencial de la precesión, $\Delta\Psi$, al igual que la nutación en oblicuidad sería $\Delta\varepsilon$. Los primeros términos de las expresiones que fijan su valor son los siguientes:

$$\Delta\Psi'' = - (17''.254 + 0''.017 \tau_0) \sin \lambda_{NA} + 0''.209 \sin 2 \lambda_{NA} - 1''.272 \sin 2 \lambda_{SF},$$

$$\Delta\varepsilon'' = (9''.210 + 0''.0009 \tau_0) \cos \lambda_{NA} - 0''.090 \cos 2 \lambda_{NA} + 0''.551 \cos 2 \lambda_{SF}.$$

En esas ecuaciones no figura ya la longitud de la Luna, indicando τ_0 los siglos transcurridos desde 1900. Cuando no se pretende una gran exactitud pueden ser de utilidad las fórmulas más simples que se indican:

$$\Delta\Psi'' = - 17''.25 \sin \lambda_{NA} - 1''.27 \sin 2\lambda_{SF},$$

$$\Delta\varepsilon'' = 9''.21 \cos \lambda_{NA} + 0''.55 \cos 2 \lambda_{SF}.$$

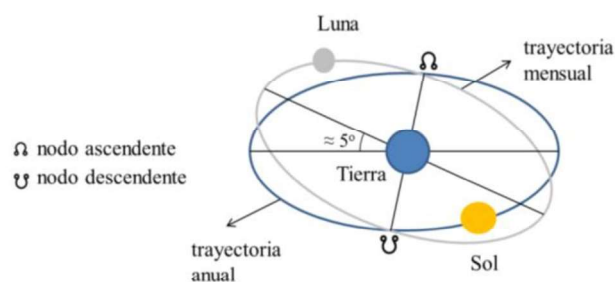
Truncando los desarrollos para resaltar únicamente el término más importante de la nutación, resultarían las expresiones: $\Delta\Psi'' = - 17''.25 \sin \lambda_{NA}$ y $\Delta\varepsilon'' = 9''.21 \cos \lambda_{NA}$, aunque con el debido rigor debieran ser estas otras: $\Delta\Psi'' \sin \varepsilon = -10''.05 \cos 2\varepsilon \sin \lambda_{NA}$ e $\Delta\varepsilon'' = -10''.05 \cos \varepsilon \cos \lambda_{NA}$. Ahora bien si se imagina un plano tangente al polo medio, correspondientes a una época, y en él un sistema cartesiano cuyo eje de abscisas sea tangente al círculo de latitud, las coordenadas del polo verdadero serían $x = \Delta\varepsilon$ e $y = \Delta\Psi \sin \varepsilon$. Teniendo en cuenta las anteriores expresiones resultaría la ecuación

$$y^2 = C^2 \cos 2\varepsilon^2 - \frac{\cos 2\varepsilon^2}{\cos \varepsilon^2} x^2,$$

en donde $C = 10''.05$. La conclusión es obvia, el polo verdadero describe una elipse, la elipse de nutación, alrededor del polo medio, cuyo semieje mayor es $C \cos \varepsilon = 9''.21$, y cuyo semieje menor es $C \cos 2\varepsilon = 6''.68$. Bails reconocía en su trabajo la existencia de esta elipse, aunque hubiese basado su exposición en el supuesto de que se tratase de un círculo:

“Todos los cálculos de nutación que hemos hecho suponen que el polo traza un círculo. Sin embargo observó el mismo Bradley algunas

apariencias que no concordaban con la teórica que dejamos declarada, y que los resultados de las observaciones de α de Casiopea, y η de la Osa Mayor, salían conformes a la teórica con suponer que el polo en lugar de un circulillo traza una elipse cuyo diámetro...en la dirección del coluro de los equinoccios no fuese más que de $16''$, y de 18 en la dirección del coluro de los solsticios. Según Mr. D'Alembert el eje menor de esta elipse ha de ser respecto del mayor lo que el coseno de $23^\circ \frac{1}{2}$ es al coseno del duplo”.



Los nodos de la órbita lunar, obsérvese que la máxima latitud eclíptica de la Luna es del orden de los 50. La eclíptica debe su nombre al hecho de que la latitud de la Luna ha de ser próxima a cero para que se produzca el eclipse.

Los efectos de la nutación sobre las coordenadas estelares son de menor relevancia que los de la precesión, de manera que si estos pueden considerarse diferenciales a intervalos cortos¹⁴³ con más motivo podía hacerse una simplificación análoga para aquellos, máxime cuando en la nutación el periodo es mucho más pequeño. Por otro lado como la latitud eclíptica siempre se podrá suponer constante, su diferencial sería cero; lógicamente no sucederá lo mismo con la oblicuidad. Aplicando las relaciones diferenciales de la trigonometría esférica al triángulo formado por el polo de la eclíptica, el polo del ecuador y la estrella, resultarían las dos expresiones siguientes:

$$d\delta = \sin \varepsilon \cos \alpha d\lambda + \sin \alpha d\varepsilon \text{ y } \cos \delta d\alpha = -\cos \alpha \sin \delta d\varepsilon + \cos S d\lambda,$$

teniendo en cuenta que el ángulo de posición S es función de α , β , δ y ε , que $d\lambda = -\Delta\Psi$ y que $d\varepsilon = \Delta\varepsilon$, se obtendrían las dos ecuaciones que se indican:

$$d\alpha = -\Delta\Psi (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \tan \delta) - \Delta\varepsilon \cos \alpha \tan \delta,$$

¹⁴³ Por tratarse de un fenómeno progresivo durante el año platónico.

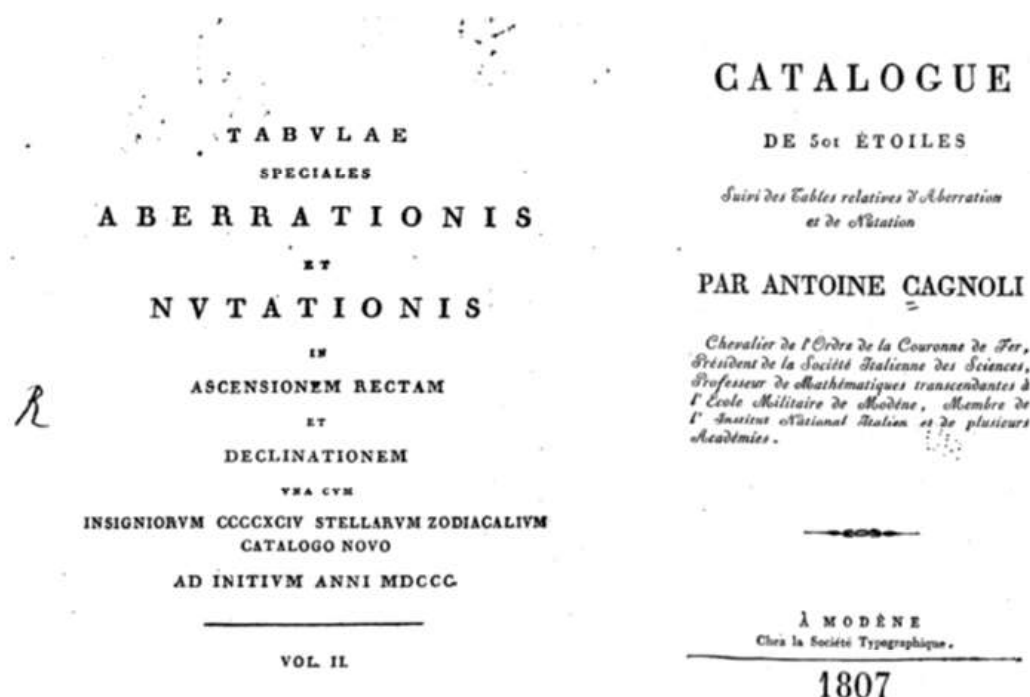
$$d\delta = -\Delta\Psi \sin \varepsilon \cos \alpha + \Delta\varepsilon \sin \alpha.$$

Con los primeros términos de las fórmulas anteriores se podrían hallar unas más concretas:

$$d\alpha = -17''.25 \cos \varepsilon \sin \lambda_{NA} - 17''.25 \sin \varepsilon \sin \lambda_{NA} \sin \alpha \tan \delta - 9''.21 \cos \lambda_{NA} \tan \delta,$$

$$d\delta = -17''.25 \sin \varepsilon \sin \lambda_{NA} \cos \alpha + 9''.21 \cos \lambda_{NA} \sin \alpha.$$

Bails no tardó en expresar su temor, lógico por otra parte, a tanto cálculo: “de todo lo dicho hasta aquí se infiere que por razón de la aberración y nutación han llegado a ser los cálculos de la Astronomía moderna de una prolijidad capaz de aburrir a los calculadores, si no tuviesen el alivio de las Tablas. En las que publicaremos¹⁴⁴ en el Tomo X se hallarán las nutaciones de las estrellas de primera magnitud”. Quizás fuese M. Mezger el primero en publicar, Manheim (1778), una tabla para calcular la aberración y la nutación de 352 estrellas: *Tabulae Aberrationis et Nutations*, no obstante ya habían aparecido algunas similares en los anales de la revista *Connaissance des Temps*, entre 1760 y 1774, que luego serían revisadas y actualizadas por Delambre.



Tablas para el cálculo de la aberración y de la nutación debidas al Barón de Zach y al italiano Cagnoli.

¹⁴⁴ Aunque Bails las anunciara también en otro lugar, no parece que llegaran a publicarse.

El nuevo siglo comenzó con otras dos que tuvieron gran aceptación, a partir de su aparición en 1807, cuyos autores fueron los astrónomos Antonio Cagnoli y Franz Xaver von Zach. Los títulos respectivos fueron: *Catalogue de 501 étoiles, suivi des tables relatives d'Aberration et de Nutation* (Modena) y *Tabulae Speciales Aberrationis et Nutationis* (Gotha). Ambas fueron superadas veinte años después por las que publicó F. Baily, con el auxilio de la *Astronomical Society of London: New Tables for facilitating the computation of precession, aberration and nutation of two thousand eight hundred and eighty-one principal fixed stars, together with a catalogue of the same reduced to january 1, 1830*. En todas ellas se agrupaban los términos de las fórmulas correspondientes a la nutación, en dos bloques, por una parte aquellos que dependían de las coordenadas lunares y por otra los que dependían de las del Sol ficticio: en el primer caso proporcionaban la nutación lunar y en el segundo la solar.

La última corrección astronómica a la que se refirió Bails, en su libro de astronomía, fue a la de la paralaje, bajo el epígrafe *De la Paralaje anua de las Estrellas fijas*. Su título resultaba un tanto contradictorio con el discurso posterior, pues afirmaba en él que “la paralaje anua es del todo punto imperceptible”; por otro lado aseguraba más adelante que ese concepto permitiría establecer una escala con la que medir las distancias a las estrellas, dando a entender que unas estarían más alejadas que otras y que la denominación de estrellas fijas carecería de sentido.

El que Bails desarrollase dicho epígrafe podría entenderse como una especie de reconocimiento al esfuerzo baldío de tantos astrónomos por evaluar la paralaje¹⁴⁵, un interés que fue más allá de la ciencia experimental. En efecto, desde varios siglos atrás se venía utilizando esa falta de paralaje para atacar el heliocentrismo, considerando que su posible existencia era contraria a la cosmología aristotélica y a su postulado sobre la inmutabilidad del universo. Más de cincuenta años tuvieron que transcurrir, desde que Bails redactase su trabajo, para que Bessel midiera por vez primera la paralaje de la estrella 61 de la constelación del Cisne y quedase superado el modelo que había servido de patrón a varias generaciones.

¹⁴⁵ Bails añadía “asegura Bradley que si fuera de 1'' por lo menos, la hubiera reparado cuando se dedicó a hacer tantas observaciones, particularmente de γ del Dragón, cuyas observaciones concuerdan en todos tiempos con la aberración sin acudir a paralaje alguna”.



Grabado de Friedrich Wilhelm Bessel y la primera página de su artículo: Bestimmung der Entfernung des 61^{sten} Sterns des Schwans, en el que dio cuenta de la paralaje anual de la estrella 61 de la constelación del Cisne. El trabajo fue publicado en la prestigiosa revista Astronomische Nachrichten.

No obstante, parece como si Bessel hubiese vislumbrado ese futuro próximo¹⁴⁶, en tanto que comentó como esta paralaje anual afectaría a las coordenadas estelares¹⁴⁷ y como relacionaría las coordenadas geocéntricas con las heliocéntricas, al igual que la paralaje diurna ligaba las topocéntricas con las geocéntricas. Incluso mencionó la elipse de paralaje descrita anualmente por algunas estrellas, en clara correspondencia con la de la órbita terrestre, y sus diferentes excentricidades, en función de la posición de la estrella: “del mismo modo, cuando la Tierra estuviere en B, la estrella parecerá en b, correspondiendo al punto de la eclíptica opuesto al punto donde está la Tierra, y en virtud de esto parecerá que anda el circulillo *abcd* alrededor del Polo de la eclíptica en el discurso de un año.

¹⁴⁶ Ha de tenerse en cuenta que en algunos tratados de astronomía, publicados muchos años después de la medida de Bessel, solo se hablaba de la paralaje diurna. El ya citado de Brünnow (1869) es un buen ejemplo. Ya se comentó en su momento que calculó la distancia a que se encontraría una estrella cuya paralaje anual fuese de 1'', es decir justamente lo que se llamaría parsec muchos años después (fue propuesto el vocablo por Herbert Hall Turner en el año 1913; seis años después la *International Astronomical Union* (IAU) introdujo el año luz.

¹⁴⁷ A título de curiosidad, se relacionan las correcciones convencionales inducidas por la paralaje anual π sobre las coordenadas ecuatoriales y eclípticas de una estrella. En el primer caso serían las siguientes:

$$d\alpha = (\pi/\cos\delta)[\sin\lambda_S \cos\epsilon \cos\alpha - \cos\lambda_S \sin\alpha]$$

$$d\delta = \pi(\sin\lambda_S \sin\epsilon \cos\delta - \sin\lambda_S \cos\epsilon \sin\delta - \cos\lambda_S \cos\epsilon \sin\delta), \text{ siendo } \lambda_S \text{ la longitud del Sol. En el segundo vendrían dadas por las dos ecuaciones que se indican:}$$

$$d\lambda = (\pi/\cos\beta) \sin(\lambda_S - \lambda) \text{ y } d\beta = \pi \sin\beta \cos(\lambda_S - \lambda).$$

Con esto las elipses de Sirio y Arturo se ensancharían y transformarían en círculos si sus latitudes crecieran hasta 90° .

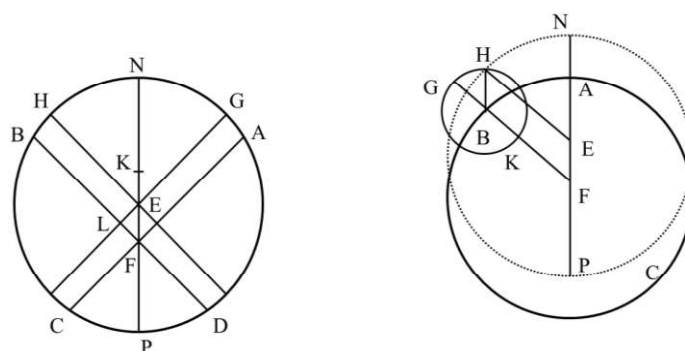
Concluido el desarrollo de las correcciones astronómicas, emprendió Bails un concienzudo examen acerca de los elementos del Sol. Primeramente refirió su movimiento anual “pues el movimiento propio aparente del Sol no es más que una ilusión ocasionada del movimiento real de la Tierra”, indicando al mismo tiempo la relación existente entre su longitud, su declinación y la oblicuidad de la eclíptica: $\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$. La interpretación de la ecuación tampoco faltó en la explicación de Bails: la declinación sería boreal en tanto que la longitud fuese menor o igual que 180° , es decir cuando el Sol se encontrara entre los dos equinoccios; la declinación sería máxima ($\delta = \varepsilon$) cuando la longitud fuera de 90° , es decir en el instante del solsticio de verano; cuando la longitud estuviese comprendida entre 180° y 360° , su seno sería negativo al igual que la declinación, la cual sería mínima ($\delta = -\varepsilon$) en el solsticio de invierno.

Bails recordaba que los astrónomos antiguos ya eran conscientes de que la longitud del Sol no variaba uniformemente, aunque creyeran que se trataba más de una apariencia que de un hecho real “como estaban persuadidos a que el Sol traza un círculo, y le anda uniformemente, si la Tierra, decían, no ocupa el centro de ese círculo, las partes de su periferia más distantes de nosotros han de parecer menores que las partes más cercanas, y el movimiento del Sol nos parecerá más lento en las primeras que en las segundas”. Bails ilustró su explicación con una figura en la que identificó los puntos correspondientes a las distancias extremas: apogeo y perigeo, determinando ambos la llamada línea de los ápsides. Hiparco fue uno de los primeros que cuantificó esa heterogeneidad, al fijar en $94 \frac{1}{2}$ días la distancia temporal entre el equinoccio de primavera y el solsticio de verano, y en $92 \frac{1}{2}$ los transcurridos entre él y el otro equinoccio, “esto es, dos días menos, bien que siempre hubiese 90° de uno a otro para el movimiento aparente”.

Suponiendo que el punto E era el centro de la circunferencia que recorría el Sol uniformemente, se debía hallar la posición del punto F en que se tendría que localizar la Tierra

“para que reparemos en el movimiento del Sol toda la desigualdad expresada por razón de su mayor o menor distancia...F será

indisputablemente el punto donde se deberá colocar el ojo, porque no hay otro punto alguno desde el que se puedan ver los puntos A, B, C, D, en ángulos rectos, de modo que parezcan distantes uno de otro 90° cabales, conforme están respecto de nosotros. El arco ABC que es el movimiento medio...en el discurso de 187 días, es conocido por la revolución del Sol, suponiéndola de 365 días 1/4, es de 184° 20', cuya mitad AH es de 92° 10'. Si restamos AH de AB, movimiento medio del Sol entre el equinoccio y el solsticio, 93° 9', quedará BH de 59'; si de AH restamos el cuadrante de círculo GH, tendremos AG = 2° 10'. En conociendo AG y BH, conocemos sus senos, que son iguales a FL y LE, y son de 378 y 172 partes en el supuesto de que sean 10000 las del radio, y hallaremos FE que tendrá 415 de las mismas partes, y esta es la excentricidad del Sol...La excentricidad FE era, según Tolomeo¹⁴⁸ de 415 partes, pero los Árabes la redujeron a 347; hoy día las observaciones más exactas le dan 336 partes no más”.



Explicación del movimiento aparente del Sol mediante círculos excéntricos y homocéntricos. Ambas figuras fueron usadas por Bails para tratar de aclarar las explicaciones pretéritas del fenómeno. El círculo centrado en B representaba al clásico epiciclo ideado por el matemático Apolonio de Pérgamo.

Añadía Bails una referencia expresa al gran astrónomo toledano Ararquiel¹⁴⁹, el cual supuso que el centro de la órbita del Sol no se encontraba siempre a la misma distancia del centro de la Tierra y moviéndose sobre una circunferencia, explicando así la variación de la

¹⁴⁸ Bails aclaraba el pensamiento del sabio alejandrino:

“supone, pues, Tolomeo que el Sol da cada año la vuelta uniformemente en un círculo, cuyo centro es E, estando la Tierra en F, la diferencia EF entre el punto desde el cual observamos y el punto alrededor del cual se hace el movimiento, es la causa, según se explica, de la desigualdad aparente del Sol. Con efecto, como el arco NH está más lejos de nosotros que el arco CP, nos ha de parecer menor, aún cuando le supongamos igual, y que es andado en un mismo tiempo, porque los objetos nos parecen tanto más chicos, cuanto más lejos están de nuestra vista”.

¹⁴⁹ Su nombre completo era Abu Isahq Ibrahim ibn Yahya al Naqqash, también conocido como Al Zarqali.

excentricidad y el movimiento del apogeo. No obstante, señalaba Bails: “pero todo esto se fundaba en el error de las observaciones antiguas, porque la excentricidad, cual la daban las observaciones más exactas de Tycho Brahe, Flamsteed y el abate de la Caille, aunque muy distantes unas de otras, es cabalmente una misma”. Bails continuó su explicación indicando que en vez de haber usado un círculo excéntrico podría haberlo hecho con otro homocéntrico, “esto es, cuyo centro corresponda al centro mismo de la Tierra, y lleva un epiciclo...la desigualdad en la primera hipótesis pende de ser visto el arco NH desde el punto F, en lugar de ser visto desde su centro E; y en la hipótesis de los epiciclos, la cantidad NH vista desde el punto F es el verdadero arco andado por el Sol, una vez que estaba en N al principio del movimiento, y ahora se halla en H”. Como aditamento a sus dos recordatorios históricos, señaló inmediatamente después que en su tiempo cualquiera de los dos supuestos anteriores resultaban innecesarias para analizar las desigualdades del movimiento del Sol y de los planetas, tal como demostraría más adelante.

Aunque ya hubiera definido Bails el año trópico como el periodo invertido por el Sol en pasar dos veces consecutivas por equinoccios o por solsticios homónimos, no había especificado la duración temporal del mismo. Para hacerlo de manera más didáctica, recurrió a dos ejemplos en los que se fijarían las fechas de comienzo del solsticio de verano y del equinoccio de primavera correspondientes al año 1749, ambos se basaron en las observaciones efectuadas previamente por el abate La Caille en el Observatorio de París (1749) y reflejadas en las nuevas versiones de sus Lecciones de Astronomía¹⁵⁰. Allí dedujo cual debería ser la diferencia entre las ascensiones rectas del Sol y de la Lira, para un cierto día del año. Sabiendo que en el instante del solsticio de verano sería de $172^{\circ} 52' 58''.5$, comprobó que a mediodía del 19 de junio de 1749 fue de $170^{\circ} 53' 10''.5$, es decir $1^{\circ} 59' 48''$ menor de lo debido. Como en virtud de sus múltiples observaciones sabía que la variación del incremento diario tendría que ser de $1^{\circ} 2' 23''$, dedujo que todavía tendrían que pasar $46^h 5^m \frac{1}{3}$ para alcanzar llegar a $1^{\circ} 59' 48''$, coligiendo que el solsticio de verano se produciría a las $22^h 5^m 20^s$ del día 20 de junio.

¹⁵⁰ Libro que obraba en poder de Benito Bails. Al concluir los ejemplos, evidenció este el rigor con el que deseaba abordar esas cuestiones astronómicas: “en los cálculos que acabamos de hacer, como no llevamos aquí otra mira que la de dar a conocer el método, hemos omitido las correcciones que necesita para reducir a un mismo instante las situaciones del Sol y de la estrella que discrepan por razón de la aberración, nutación, precesión, etc. “.

Para obtener la fecha relativa al equinoccio de primavera de ese mismo año, 1749, se tuvo en cuenta que la diferencia entre las dos ascensiones rectas habría de ser igual a $82^{\circ} 53' 7''.5$. Dado que el 21 de marzo la diferencia que se halló fue de $83^{\circ} 49' 18''.8$, se contó con un exceso de $56' 11''.3$. Como por otra parte se sabía que la variación diaria de la ascensión recta del Sol era próxima a los $54' 32''$, se pudo obtener el intervalo de $24^h 44^m$ necesario para que se alcanzase la diferencia pretendida y fijar el instante del equinoccio de primavera el día 19 de marzo a las $23^h 16^m$.



Hiparco de Nicea y Jacques Cassini, cuyos cálculos fueron determinantes para hallar la duración del año trópico. La imagen del astrónomo francés se ha superpuesto a un grabado del Observatorio de París, a comienzos del siglo XVIII.

Bails se tuvo que apoyar en dos determinaciones históricas, separadas casi 19 siglos, para poder calcular la duración del año trópico¹⁵¹. Hiparco dedujo que el equinoccio de primavera del año 146 a.C. se produjo a las $11^h 55^m$ de la mañana. Jacques Cassini, por su parte, fijó el mismo instante astronómico a las $14^h 20^m 40^s$ del día 20 de marzo de 1735. Expresando el intervalo entre las dos fechas en años julianos, obtuvo este segundo astrónomo el valor de 1880 años menos $14^d 7^h 42^m 34^s$. Ahora bien, al tener

¹⁵¹ Además de la duración del año trópico, también indicó Bails la del año sidéreo ($365^d 6^h 9^m 11^s.2$) y la del anomalístico ($365^d 6^h 15^m 20^s$), entendiendo por tal el periodo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por su apogeo (téngase en cuenta que se le suponía por entonces un avance anual de $65''.5$).

Al estudiar el movimiento del Sol, se preocupó Bails de evaluar el incremento diario de su ascensión recta ($\Delta\alpha$), en función del observado en la declinación ($\Delta\delta$) durante idéntico periodo. Para ello se valió de la figura siguiente: representando E, el equinoccio de primavera, P el polo del ecuador, SA el movimiento diurno del Sol en longitud, Ac la variación diaria de la declinación y DB el incremento en ascensión recta que se pretende averiguar. Teniendo en cuenta que algunos de los lados que interviene son diferenciales y aplicando el teorema de los senos, se deduciría la relación: $\Delta\alpha = (\Delta\delta \operatorname{ctg} \delta) / \cos \delta \cos \lambda$.



¹⁵² Bails concretó las tres correcciones que deberían ser consideradas “la primera pende del movimiento del apogeo, el cual en el discurso de un año adelanta 65′.5...por consiguiente el intervalo de tiempo que corrió desde un equinoccio al otro, se deberá añadir el tiempo que el Sol hubiera gastado en andar la expresada corta cantidad, que viene a ser 7^s.8 de tiempo”. La segunda corrección, a tener en cuenta, afectaba a la variación de la precesión equinoccial por los efectos gravitacionales ejercidos sobre la Tierra por Júpiter y Venus, la cual se estimó entonces en 0′.231 por año mayor que “la precesión media entre Hiparco y nosotros”. La última corrección tenía en cuenta además las perturbaciones inducidas por la atracción de la Luna: “esta corrección es la menor de las tres cuando se toma un intervalo de muchos años, porque no se multiplica como las dos primeras, pero se debería llevar en cuenta si el intervalo no fuese más que de un siglo”.

“aunque todas las observaciones del Sol se hacen en su limbo,..., es preciso reducirlas al centro del mismo astro, para cuya operación es indispensable saber cuánto tiempo gasta el Sol en atravesar el meridiano”. Partiendo de que el diámetro del Sol en S fuese precisamente igual al arco SC, próximo a los 31'31" a finales de junio, PSD y PCB serían los círculos horarios que pasarían por sus bordes y “el arco DB del ecuador es igual al diámetro del Sol en ascensión recta, esto es a la diferencia que hay entre la ascensión recta del borde precedente y la del borde siguiente”. Es pues inmediato que el ángulo en el Polo, idéntico al arco BD, mediría el tiempo invertido por el disco solar en atravesar el citado círculo horario; obtenido su valor y transformado en tiempo, quedaría resuelta la cuestión.

Bails completó su exposición con un caso práctico: si la declinación del Sol fuese de 23° 11' el día 30 de junio, el tiempo necesario sería de 2^m 17^s.14. Más adelante se refería a esa corrección por semidiámetro en estos términos: “Los astrónomos hacen muchísimo uso de la cantidad que acabamos de determinar, porque no observan comúnmente más que uno de los bordes del Sol, entonces para determinar cuando pasa el centro o el mediodía verdadero, se la debe añadir la mitad de la cantidad que hemos hallado en tiempo solar. Por este motivo publicamos la tabla siguiente calculada por Mr. De la Lande, en el supuesto de que el diámetro apogeo del Sol sea de 31'31", conforme se lo han manifestado las observaciones”.

Días	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.
1	1' 10" 8	1' 8" 0	1' 5" 2	1' 4" 3	1' 5" 8	1' 8" 2
7	1' 10, 5	1' 7, 3	1' 4, 8	1' 4, 4	1' 6, 3	1' 8, 5
13	1' 10, 0	1' 6, 6	1' 4, 5	1' 4, 7	1' 6, 8	1' 8, 6
19	1' 9, 4	1' 6, 0	1' 4, 3	1' 5, 0	1' 7, 3	1' 8, 7
25	1' 8, 8	1' 5, 5	1' 4, 2	1' 5, 4	1' 7, 7	1' 8, 7
	Julio.	Agosto.	Septiemb.	Octubre.	Noviemb.	Diciemb.
1	1' 8" 5	1' 6" 4	1' 4" 2	1' 4" 2	1' 6" 8	1' 10" 1
7	1' 8, 3	1' 5, 9	1' 4, 0	1' 4, 5	1' 7, 5	1' 10, 6
13	1' 7, 9	1' 5, 4	1' 4, 0	1' 4, 9	1' 8, 2	1' 10, 9
19	1' 7, 5	1' 5, 0	1' 3, 9	1' 5, 4	1' 8, 9	1' 11, 0
25	1' 7, 0	1' 4, 6	1' 4, 0	1' 6, 0	1' 9, 5	1' 11, 0

Tabla del tiempo que el semidiámetro del Sol gasta en atravesar el meridiano en los diferentes tiempos del año, en minutos, segundos y décimas de segundo.

Sabido el tiempo invertido por el semidiámetro solar en cruzar el meridiano, obtuvo Bails el que tardaría en atravesar un vertical o un almicantrat cualquiera. En el primer caso habría que dividir el tiempo correspondiente al meridiano por el coseno del ángulo paraláctico, mientras que en el segundo habría que dividirlo por el seno del mismo ángulo.

Bails dedicó al estudio de los planetas casi la mitad de este libro de astronomía, aunque solo se hayan seleccionado aquí algunos aspectos de sus movimientos alrededor del Sol. Al tratar de ellos hizo una apretada síntesis de los primeros modelos recopilados por Tolomeo, de las correcciones que propuso Tycho Brahe y otro resumen mucho más extenso de los trabajos del más genial de sus discípulos, el alemán Johannes Kepler, que desembocó en sus reconocidas leyes. Bails inició su exposición mencionando “las desigualdades periódicas que penden de la figura de las órbitas planetares”. Dos fueron los hechos fundamentales que ya fueron revelados en la antigüedad: la velocidad lineal no era uniforme¹⁵³ y la diferencia entre las longitudes geocéntricas y heliocéntricas, cuantificada por la paralaje anua. Bails recordaba como Tolomeo recurrió a la excentricidad orbital para explicar la primera desigualdad y a los epiciclos para aclarar la segunda, afirmando acto seguido “la facilidad con que esta segunda desigualdad se explica en el sistema copernicano es uno de los mayores argumentos en su abono”.

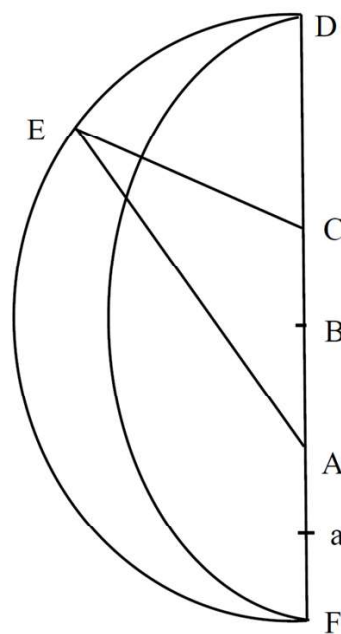
Más adelante se refirió con cierto detalle a la hipótesis geocéntrica de Tolomeo¹⁵⁴ “para dar una muestra de la obscura complicación del sistema

¹⁵³ La llamada primera desigualdad.

¹⁵⁴ Bails resumía así la explicación que dio Tolomeo, con relación a las dos desigualdades:

“Sea A el centro de la Tierra, que es también el centro del mundo, D, el centro del *excéntrico* o de la órbita del planeta FKMLF: este círculo también se llama *Deferente*, porque lleva el centro del epiciclo. En el punto F de la órbita se traza el epiciclo GQ, más arriba del centro D se toma una cantidad DE igual a la excentricidad AD y desde el punto D se traza un círculo RKLOR, de igual tamaño que el excéntrico. A este círculo se le llama *Ecuante*, porque el centro F del epiciclo que se mueve en el deferente FKML tiene entretanto un movimiento igual alrededor del centro E del ecuante RKO; porque el epiciclo anda su deferente con movimiento desigual, y esta desigualdad ha de ser tal que desaparezca respecto del centro E del ecuante y que los ángulos como FEI que forman la línea de los ápsides y la línea tirada al centro del epiciclo siempre sean iguales en tiempos iguales. Esta es la razón por que Tolomeo llama el centro E punto de igualdad. La *anomalía verdadera del excéntrico* es el ángulo FAI que señala la verdadera distancia del centro del epiciclo a la línea de los ápsides; la anomalía media del excéntrico es el movimiento medio que hubiera tenido el centro del epiciclo si hubiese caminado uniformemente a lo largo del deferente, también es el ángulo FEI formado en el centro del ecuante, porque este ángulo crece uniformemente. Hasta aquí no hemos hablado más que de la primera desigualdad, veamos como explicaba Tolomeo la segunda. Estando cada planeta en conjunción con el lugar medio del Sol, se supone que sale del vértice o del apogeo de su epiciclo, pongo por caso del punto G; se supone que gasta en andar dicho epiciclo todo el tiempo que se observa entre una conjunción media y la siguiente, esto es, el tiempo de una revolución sinódica; es a saber, Saturno, un año y 34 días, según los antiguos, Júpiter, un año y

que este regula”. Bails insistía en que Tolomeo postulaba el movimiento circular del planeta, pero debiendo de observarlo no desde el centro, E, del ecuante, sino desde el punto K del círculo excéntrico o deferente; aunque lo hiciera sin demostración alguna: “desde el centro B trácese el excéntrico DEF, cuya excentricidad sea BA, por manera que la Tierra o el ojo del espectador esté en A; D será el apogeo, F el perigeo. Si más arriba del centro B se toma una línea BC = BA, será C el punto alrededor del cual Tolomeo supone que el planeta traza ángulos iguales en tiempos iguales, o el punto desde el cual su movimiento parecería uniforme, el *Ecuante*, el punto de igualdad”.



Excéntrico y línea de los ápsides, ilustración de Benito Bails.

Aunque T. Brahe creyó haber perfeccionado con su modelo la hipótesis tolemaica, más tarde señaló Kepler que había sido un empeño vano, pero que le sirvió como punto de partida para comprobar si las órbitas planetarias eran o no circulares. Bails efectuó a continuación un documentado análisis, de evidente interés histórico, acerca de las desigualdades observadas en la órbita de Marte. De acuerdo con Brahe, se podrían representar todas ellas por medio de un excéntrico, situando los

219 días, Mercurio, 116 días; mientras que los epiciclos andan sus deferentes cada uno en el tiempo que dura la revolución de cada planeta. Por lo que mira a la cantidad de los radios de los epiciclos, era arbitraria, nada la determinaba en el sistema de Tolomeo”.

Bails había definido antes la revolución sinódica de un planeta respecto del Sol, o respecto de la Tierra cuando la suponemos vista desde el Sol, como el tiempo invertido por dicho planeta en volver a su conjunción.

puntos A y C, de la figura anterior, a diferentes distancias del centro B; aunque se apreciaban diferencias de algunos minutos. Kepler dudó de la validez de ese nuevo modelo y decidió estudiar las referidas observaciones con mayor profundidad, para presentar otro que resultase más verosímil.

Los comentarios que hizo Bails a propósito de las investigaciones de Kepler, fueron tan concretos que mal podrían entenderse sin que hubiese tenido a la vista un ejemplar de la *Astronomia Nova*¹⁵⁵, es decir la obra en la que el genial astrónomo dio cuenta del tratamiento de las observaciones de Marte realizadas por su maestro. Así resumía Bails los pasos iniciales de Kepler:

“Lo primero que le importaba averiguar eran las distancias de la Tierra al Sol, que sirven de escala y término de comparación respecto de todas las demás distancias que se miden en el cielo. Las distancias del Sol a la Tierra no se podían averiguar en distintos tiempos del año, sin determinar primero la excentricidad AB de la órbita terrestre, esto es, la distancia entre el centro del Sol supuesto en A, y el verdadero centro del círculo DEF que la Tierra anda. Creyeron los antiguos, y Tycho también, que para la órbita del Sol y de la Tierra, el centro B era el punto de igualdad alrededor del cual los movimientos de la Tierra parecerían uniformes, y que la línea total AC, que sirve de base a la ecuación del centro o al ángulo CEA está debajo del centro B, o entre B y a. Este era el primer punto que se había de indagar, y bien presto conoció Keplero la bisección de la excentricidad; quiero decir, que conoció que el centro B del círculo que la Tierra anda estaba en medio de la excentricidad total CA, y que estaba entre el punto A, adonde está el

¹⁵⁵ Su título completo fue el siguiente: *Astronomia Nova AITIOΛOΓHTOΣ seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G.V. Tychonis Brahe* (Nueva Astronomía, basada en la causalidad o física del cielo, derivada de comentarios del movimiento de la estrella Marte, a partir de las observaciones del gentilhombre Tycho Brahe). El libro, publicado en el año 1609, proporcionó sólidos argumentos en favor del heliocentrismo de Copérnico, si bien rechazaba la existencia del punto imaginario cercano al Sol, centro de todas las órbitas planetarias; siendo entonces cunado mencionó por primera vez su carácter elíptico. En la introducción del trabajo refuta, con firmeza prudente, las escrituras, tratándolas de meras conjeturas espirituales pero no de dogmas físicos. Igualmente reseñable fue su demostración de que los modelos anteriores al suyo no eran válidos para predecir las posiciones futuras de los planetas. Fue entonces cuando introdujo su celebrado diagrama del movimiento de Marte con relación a la Tierra, en el supuesto de que esta permaneciese inmóvil en el centro de su órbita, una trayectoria caótica que por sí misma explicaba la inconsistencia de tales modelos. Otra de sus contribuciones más subrayables fue la constatación de que la velocidad orbital de los planetas dependía de su distancia al Sol, una idea revolucionaria que acabaría transformándose en su segunda ley, aunque la descubriera antes de la primera. Es también conocido el hecho de que su tercera ley fue presentada diez años después que las otras dos, justamente cuando publicó *Harmonices Mundi*.

Sol, y el punto C, donde deberíamos estar para ver movimientos iguales desde la Tierra”.



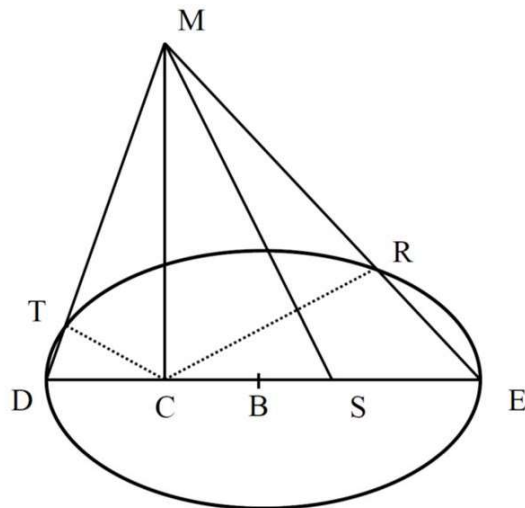
Monumento a Kepler en la plaza principal de Weil der Stadt, su ciudad natal, al Oeste de Stuttgart. Junto a él se reproduce la primera página de su Astronomia Nova, una de las obras más importantes en la historia de la astronomía. Gracias a su profundo análisis de las observaciones de Marte, practicadas por Tycho Brahe, concluyó que su órbita en torno al Sol, como las de los demás planetas, debería ser elíptica.

Kepler intentó explicar el porqué de la existencia del ecuante, es decir como tenía que haber un punto C, diferente del centro alrededor del que apreciaba un movimiento regular y uniforme. Para ello supuso que igual situación se tendría que plantear al abordar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, influenciado sin duda por el pensamiento de Brahe, el cual creía que el movimiento del Sol era uniforme alrededor del centro B, estando la Tierra localizada en A. Él mismo calculó la excentricidad AC, determinó el residuo CD del diámetro FD por radio del círculo, resultando que su valor no coincidía con el radio BD, considerado al principio. Tal como proseguía Bails:

“era, pues, preciso que hallase diferentes entre sí los radios de la órbita solar, y se persuadiese a que el Sol no siempre estaba a la misma distancia respecto del centro del excéntrico; esto le manifestaba a Keplero que dicho centro no era el punto alrededor del cual se verificaba el movimiento

regular. Por este motivo buscó Keplero por observación la paralaje anua de Marte en dos posiciones de la Tierra diametralmente opuestas, en el afelio y el perihelio, con corta diferencia, observando cada vez Marte en cuadratura hacia el mismo punto de su órbita”.

Kepler partió de que la órbita solar era un círculo centrado en B, círculo que debía comparar con los de los otros planetas. Consideró que S era el centro del Sol, M la posición de Marte en su órbita, observado desde la Tierra situada en D y en E. La elección del punto M la eligió de manera que los ángulos MCD y MCE fuesen rectos, tal como aparecen en la figura siguiente, siendo C el punto alrededor del cual parecía que se movía la Tierra con velocidad uniforme. De acuerdo con las hipótesis de T. Brahe, CD y CE serían iguales, por otro lado, al ser rectos los ángulos en C, las paralajes anuas de Marte deberían resultar idénticas. Sin embargo, CE resultaba claramente mayor que CD, “por no estar el punto de igualdad en B, sino en C, se hallaba que el ángulo CME era mayor que el ángulo CMD, y el que porfiaba en suponer que el radio BD del círculo era la base de aquel ángulo, se hallaba precisado a sostener que no era de una longitud constante el radio del círculo que la Tierra andaba. Esto determinó Keplero a poner el punto de igualdad en C, y no en el centro B del círculo de la Tierra”.



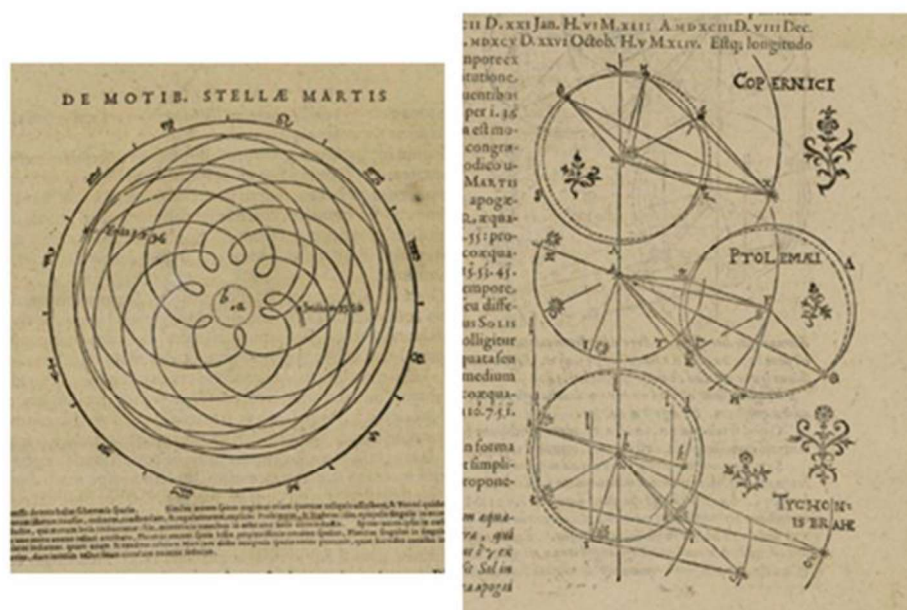
Esquema usado por Bails para aclarar la situación de Marte (M) con relación al Sol (S) y a la Tierra (D y E).

Como Kepler sospechaba que la variación en el radio excéntrico de la Tierra se debía a que el punto C no era en realidad el centro del círculo, eligió dos observaciones singulares de Marte efectuadas el 18 de mayo de 1585 y el 22 de enero de 1591, extrapolando los resultados de las medidas para el 30 de mayo y para el 20 de enero, días en que sabía su longitud, por haberla calculado Brahe. Dado que los ángulos MCD y MCE, eran ambos de $64^{\circ} 23' \frac{1}{2}$, pudo determinar los valores de las paralajes anuas: $36^{\circ} 51'$ para la primera y $38^{\circ} 6'$ para la segunda. La diferencia de $1^{\circ} 15'$ probó que el segmento CR era mayor que el CT y que CE era mayor que CD; con lo que el denominado punto de igualdad¹⁵⁶ no sería B sino un punto C situado al otro lado del centro. Asimismo comprobó, a partir de los dos triángulos de paralaje, TCM y RCM, que la relación entre las distancias BC y BD era igual a 1837/100000. Por otro lado, T. Brahe había obtenido, a través de sus múltiples observaciones, que la distancia total, CS, del Sol al centro de igualdad era de 3584, es decir prácticamente el doble de 1837. Bails comentó entonces que fue este un descubrimiento relevante, pues los astrónomos antiguos solo admitían la bisección de la excentricidad para los planetas superiores, pero no para la Tierra. La importancia radicaba en que sin él “no era posible determinar puntualmente las distancias de la Tierra al Sol en diferentes tiempos del año, cuya determinación era un punto fundamental”.

Tras haber obtenido la posición del centro de igualdad con respecto a la órbita terrestre, procedió de forma análoga para la órbita de Marte. Determinadas las dimensiones del excéntrico de Marte, evaluó de nuevo, con esa hipótesis circular, doce oposiciones del planeta observadas por T. Brahe sin que se produjeran discrepancias mayores de $1 \frac{3}{4}$. Aunque Kepler pensara en un primer momento, que no podría ser falsa una hipótesis que se ajustase tanto a la realidad de la observación, no tardó en comprobar su falsedad. Se apoyó para ello en las coordenadas eclípticas que presentaba Marte en otros puntos de su órbita, su conclusión fue por tanto obvia: las oposiciones de Marte no bastaban para determinar la figura de su órbita, tal como recogía Bails en su exposición¹⁵⁷.

¹⁵⁶ Alrededor de él los movimientos de la Tierra resultaban sensiblemente uniformes.

¹⁵⁷ Bails añadía: “el círculo excéntrico, por cuyo medio Keplero representaba con tanta puntualidad las 12 oposiciones, tenía una excentricidad total AC = 18364, pero AB era de 11332 y BC de 7232 no más, suponiendo 100000 la distancia de la Tierra”.



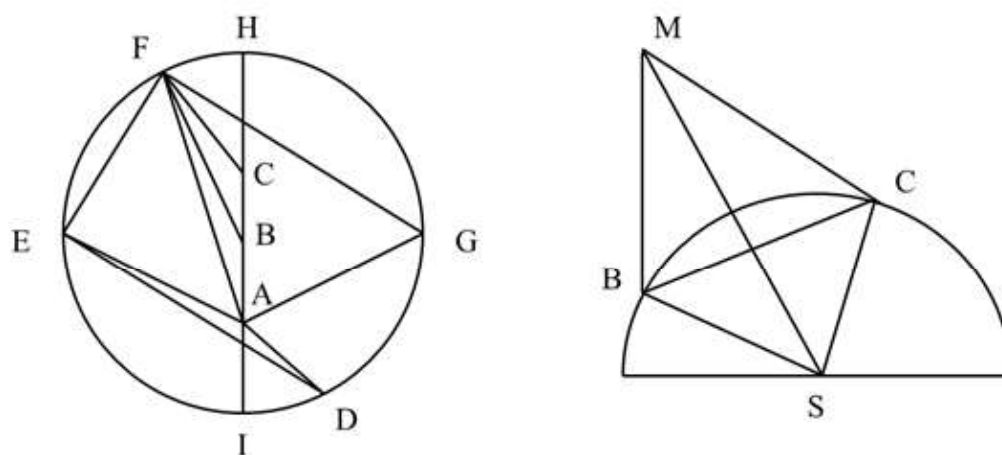
Dos ilustraciones del libro de Kepler *Astronomia Nova* (1609). En la primera (página 4) representó la trayectoria aparente de Marte, de acuerdo con las explicaciones de los antiguos astrónomos geocentristas. En la segunda (página 131) esquematizó las hipótesis, al respecto, de Copérnico, Tolomeo y Tycho Brahe.

Sin embargo Kepler continuaba pensando que AB y BC tenían que ser iguales, máxime cuando la hipótesis que ajustaba bien las longitudes de Marte en su oposición no concordaba con las latitudes correspondientes ni con las longitudes en otras posiciones de su órbita; de hecho las distancias AF y AE, representadas en la figura siguiente, tampoco eran acordes con la hipótesis circular previa aunque si lo fuesen los ángulos, supuestos los valores $AB = 11332$ y $BC = 7232$. Por otro lado, los diámetros de los epiciclos, según los modelos de Copérnico y de Tycho Brahe, obtenidos por Kepler fueron de 3616 y de 14948, siendo el segundo igual a la excentricidad total (18564) menos la mitad de la excentricidad menor (7232), ya que como decía Bails:

“es preciso que los dos radios del epiciclo compongan juntos la máxima excentricidad posible”. Otra de las circunstancias, tomada en cuenta por el astrónomo, fue que las paralajes de Marte¹⁵⁸ eran erróneas cuando se suponía que AB y BC eran iguales, llegando a presentar discordancias de hasta 8'. Ese error resultaba inaceptable a juicio de Kepler, hasta el punto de creer que con él se probaba la falsedad de las hipótesis circulares. Como indicaba Bails, si Kepler hubiese pasado por alto esos 8', es probable que

¹⁵⁸ Asociadas como es notorio a sus distancias al Sol.

no hubiese avanzado más en sus investigaciones y no se le habría ocurrido insistir en sus cálculos de las distancias de Marte al Sol, llegando finalmente a la conclusión de que “la órbita de Marte no era un círculo perfecto”.



Ilustraciones de Benito Bails complementarias a sus explicaciones sobre los cálculos de Kepler, relativos a las distancias entre Marte (M, D, E, F, G, H, I) y el Sol (A y S).

Kepler decidió hallar las distancias de Marte al Sol en tres puntos de su órbita, para deducir así la forma y el tamaño de la misma. En la figura adjunta, S representaría el centro del Sol, M el de Marte, B y C dos puntos de la órbita terrestre en los que se encontraría la Tierra cuando Marte ocupase el mismo punto M de su órbita, de manera tal que estuviera a la misma distancia del Sol, SM. El problema se resolvería, como detallaba Bails, a través del triángulo rectángulo BSC. En él se conocerían los lados BS y CS puesto que coincidirían con las distancias de la Tierra al Sol, el ángulo BSC, diferencia entre las longitudes terrestres en B y C, también sería un dato de partida. Habría por tanto que determinar sus otros tres elementos, a saber: los ángulos BCS, CBS y el lado BC. Su obtención no planteó dificultad alguna, pues el ángulo MBS era la diferencia entre la longitud observada de Marte y la del Sol, cuando la Tierra estaba en el punto B; también se podrían deducir sin dificultad los ángulos MBC y MCB. Procediendo así se conocerían en el triángulo MCB dos ángulos y “el lado que abrazan”, con lo que podrían determinarse la distancia de Marte al Sol (MS) y el ángulo MSB; el cual añadido a la longitud de la Tierra proporcionaría la longitud heliocéntrica de Marte en cada una de las dos observaciones.

Apoyándose en numerosas observaciones de Brahe, dedujo Kepler que la excentricidad del Sol era de 1800 para un radio de 100000. Con tales datos pudo determinar las distancias de la Tierra al Sol, SB y SC, para un cierto instante, además del ángulo CSB. No obstante, como recogió Bails, repitió todos sus cálculos con diferentes excentricidades, “tomando cada vez cinco observaciones en lugar de tres, a fin de que la conformidad de diferentes resultados le diera mejor a conocer el verdadero. Las diferentes partes de sus investigaciones se confirmaban mutuamente, y no podía ser que cinco posiciones de la Tierra diesen todas de dos en dos un mismo resultado para la distancia SM de Marte al Sol, a no ser que se hubiesen supuesto verdaderas las distancias SC y SB de la Tierra al Sol”.

Acto seguido, indicó Bails que aparte de las distancias de Marte al Sol, dedujo Kepler la excentricidad de su órbita, después de evaluar dos distancias: una en el entorno del afelio y otra en el del perihelio: “sacó la primera de 166780 (suponiendo siempre de 100000 la distancia media del Sol a la Tierra) y la otra de 138500; por manera que la distancia media era de 152640, y la excentricidad de 14140”. Con semejante proceder obtuvo, a partir de múltiples observaciones, tres distancias de Marte al Sol, AF, AE y AD, con independencia de cualquier supuesto orbital. Asimismo determinó la excentricidad AB, 14140, comparando las distancias extremas a dicho planeta: AH y AI, es decir las correspondientes al afelio y al perihelio. Bails glosó las etapas finales del proceso con estas palabras:

“suponiendo, pues, la órbita circular, tenemos el triángulo ABF, en el cual conocemos BF, con la excentricidad AB, y la anomalía verdadera BAF, es fácil de hallar la distancia verdadera AF; lo propio diremos de las otras distancias AE, AD. Las tres distancias que Keplero hallaba en esta suposición eran

RELACIÓN DE LAS TRES DISTANCIAS DE MARTE AL SOL			
Calculadas	166605	163883	148539
Observadas	166255	163100	147750
Errores	350	783	789

Por consiguiente las verdaderas distancias de Marte al Sol eran más cortas que las distancias calculadas en la hipótesis circular, y lo eran tanto más cuanto más se arrimaban a los lados G y E de la figura. Resultaba forzoso de aquí que la órbita era aplanada, esto es, ovalada¹⁵⁹”.

Una vez que Kepler estuvo convencido de que la órbita de Marte no podía ser circular, buscó otras alternativas entre los óvalos, movido quizás porque su maestro hubiese elegido uno para explicar el movimiento del cometa de 1577. En su elección final de la elipse debió primar su gran simetría, pues como comentaba Bails “entre las curvas prolongadas u ovaladas la elipse es la más simple, y la primera”. La validez de un modelo tan revolucionario quedó pronto confirmada con observaciones de Marte en múltiples posiciones de su órbita. Como También apuntaba Bails “esta conclusión que Keplero aplicó después a todos los planetas, se verifica en todos con igual puntualidad; es una consecuencia de la atracción general de los cuerpos, y es hoy día regla general que los seis planetas primarios trazan elipses cuyo foco está en el centro del Sol¹⁶⁰”.

Bails complementó su información señalando que Kepler extrapoló sus descubrimientos a las órbitas de los otros planetas, calculando las distancias de cada uno de ellos y las excentricidades de sus órbitas: “que no es más que la diferencia entre la máxima y la mínima¹⁶¹”. Fue gracias a esas determinaciones cuando descubrió Kepler la relación entre los cubos de las distancias medias y el cuadrado de los periodos correspondientes¹⁶². Esa tercera ley permitió a los astrónomos posteriores efectuar sus propios cálculos, con unos resultados ligeramente diferentes a los obtenidos por

¹⁵⁹ Kepler terminó el capítulo XLIV de su *Astronomia Nova* con la frase siguiente: *Atque ex hoc quoque demonstratum, qod supra cap.XX.XXIII. promissime facturum: Orbitam PLANETAE non esse circulum sed figurae ovalis.*

¹⁶⁰ En la última parte del capítulo LVIII del mismo libro de Kepler, se lee *Ergo ellipsis est Planetæ iter... ut sequenti capite patescet: ubi simul etiam demonstrabitur, nullam Planetæ relinqui figuram Orbitæ, præterquam perfecte ellipticam.* En el siguiente capítulo se aborda también la misma cuestión, como prueba su título *Demonstratio, quod orbita MARTIS, librati in diámetro epycycli, fiat perfecta ellipsis: Et quod área circuli metiatur summam distantiarum, ellipticae circumferentiae punctorum.*

¹⁶¹ En la terminología actual, esa diferencia sería el doble de la distancia focal, es decir el valor del segmento definido por el centro de la elipse y uno de sus focos. Tal distancia focal es precisamente el producto del semieje mayor y de la excentricidad propiamente dicha (si a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, se define la excentricidad como la relación $e = [(a^2 - b^2)/a^2]^{1/2}$).

¹⁶² En la página 189 del libro V del *Harmonices Mundi* se lee: *Sed res est certissima exactissimaque quod proportio qua est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit præcise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, ...* (Pero es absolutamente cierto y exacto que la proporción entre los periodos de dos planetas cualesquiera es precisamente la proporción sesquialtera de sus distancias medias). Se entiende que la referida proporción es la razón 3:2 entre las potencias de unas y otras cantidades.

Kepler, todos los cuales fueron resumidos por Bails en el cuadro que se reproduce a continuación¹⁶³:

Planetas.	Dist. medias segun Keplero.	Segun las tab. carol. de Street.	Segun Mr. Ha- lley.	Segun las tab. de Mr. de la Lande.	Logaritmos de estas distancias.
Mercurio.	38806	38710	38710	38709, 88	9 5878218
Venus.	72413	72333	72333	72333, 24	9 8593379
La Tierra.	100000	100000	100000	100000	0 0000000
Marte.	152349, 5	152369	152369	152369, 27	0 1828974
Júpiter.	520000	520110	520098	520097, 91	0 7160851
Saturno.	951003, 5	953800	954007	953936, 83	0 9795196

Tablas de las distancias medias de los Planetas al Sol, según varios autores. Los datos de la tercera columna fueron incluidos por el astrónomo inglés Thomas Street en su Astronomia Carolina, a new theorie of Coelestial Motions (1661).

Otra de las ideas revolucionarias introducidas por Kepler fue la falta de uniformidad en el movimiento orbital de los planetas, ya que su velocidad disminuía al alejarse del Sol. De ella trató también en su *Astronomia Nova*, aunque la abordase desde dos puntos de vista; analizando las diferentes distancias a que se encontraba el planeta del Sol (ley de la distancia) o bien el área asociada a un cierto arco orbital (ley del área). La primera de las dos fue presentada en el capítulo XXIII, titulado *Virtutem quam Planetam movet in circulum attenuari cum discessu a fonte*¹⁶⁴. Por otra parte, en la página 167 del mismo se lee:..., *quanto longior est aδ quam aε, tanto diutius moratur Planeta in certo aliquo arcui excentrici apud δ, quam in æquali arcu excentrici apud ε*¹⁶⁵. En otras palabras, al aumentar la distancia del planeta al Sol menor será su velocidad orbital¹⁶⁶.

Su ley del área figuró en el capítulo LIX, titulado *Demonstratio, quod orbita Martis, ... , fiat perfecta ellipsis: ...*¹⁶⁷. Más adelante, en el inicio de la página 294 del capítulo LIX, escribió: *Arcum ellipseos, cujus moras*

¹⁶³ Bails concluyó este apartado asegurando que las distancias tabuladas, una vez omitidos los cuatro últimos guarismos “son entre sí como los números 4, 7, 10, 15, 52, 95. Estos son los números más simples con que se pueden expresar los intervalos y tamaños de las órbitas planetares, cuyos números hacen mucho papel en la astronomía”.

¹⁶⁴ La fuerza que mueve un planeta circularmente disminuye con su distancia a la fuente.

¹⁶⁵ ...a medida que aδ es mayor que aε, más permanecerá un planeta sobre un cierto arco del excéntrico próximo a δ que en igual arco del excéntrico próximo a ε.

¹⁶⁶ Kepler supuso, para esta ley, que las trayectorias planetarias eran circulares en vez de eclípticas.

¹⁶⁷ Demostración de que la órbita de Marte,..., es una elipse perfecta:...

*metitur area AKN, debere terminari in LK, ut sit AM*¹⁶⁸. Lo que equivaldría a decir que el tiempo invertido por Marte para desplazarse a lo largo del arco AM, de su órbita elíptica, puede considerarse medido por el área del sector AMN de la elipse, entendiendo que N marcaría la posición del Sol. Consiguientemente, el área AMN barrida por el radio vector que localiza Marte desde el Sol es proporcional al tiempo que tarda el planeta en moverse sobre el arco; en resumen, el radio vector Sol-Marte barre áreas iguales en tiempos iguales.

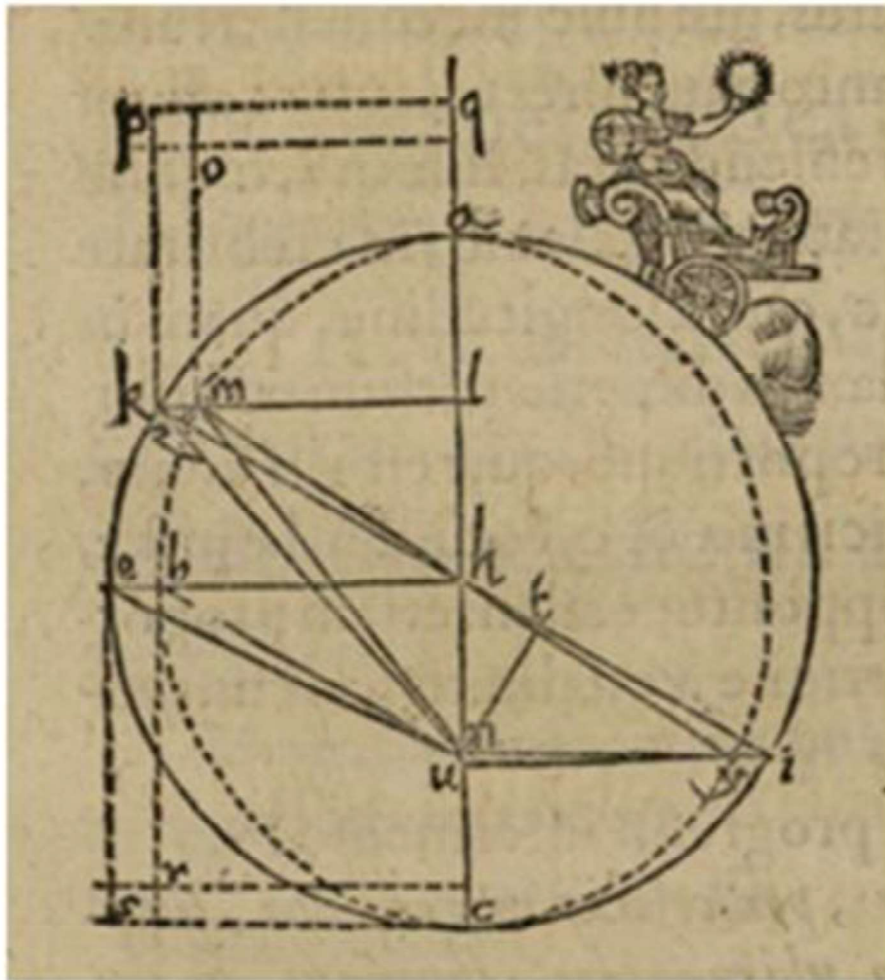


Gráfico con el que ilustró Kepler la página 294 de su Astronomia Nova, para aclarar la ley de las áreas.

Bails no hizo en su libro unas referencias tan expresas a las tres leyes de Kepler, aunque citara indirectamente la segunda al desarrollar el epígrafe *Las áreas son proporcionales a los tiempos*. Recurrió para ello a las pruebas proporcionadas por la medida de los diámetros aparentes del Sol,

¹⁶⁸ El arco elíptico, cuya duración es fijada por el área AKM, terminaría en LK para que fuese AM.

manifestando “que el movimiento del Sol es tanto más lento cuanto más lejos está de la Tierra”. Nuevamente se apoyó en las observaciones de Lalande y reprodujo dos valores de dichos diámetros: “31’31’’ en estío y de 32’36’’ en invierno”; también aportó datos relativos al movimiento horario del Sol para probar que en la primera época iba más lento que en la segunda: 2’ 28’’ y 2’33’’ fueron las respectivas cantidades, acordes ambas con el hecho de que la Tierra está más lejos del Sol en verano que en invierno¹⁶⁹.

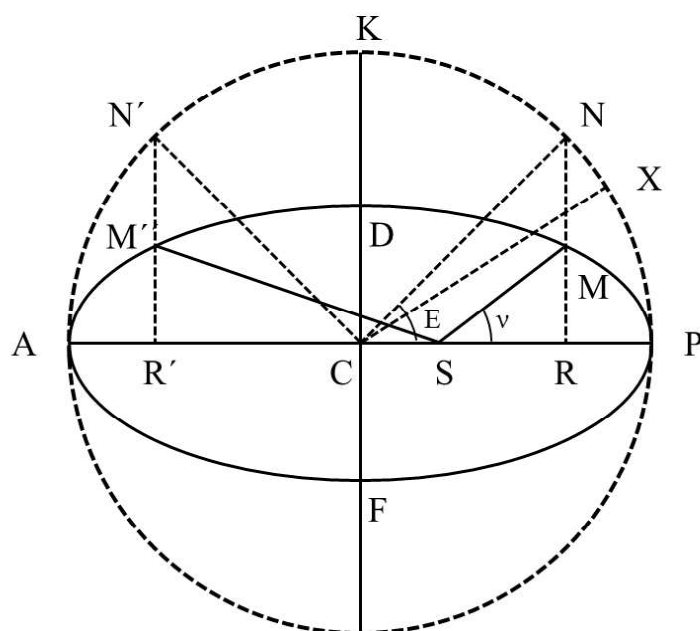
Después de haber analizado el movimiento de los planetas en sus órbitas, alrededor del Sol, y averiguado tanto la forma como el tamaño de las mismas, se propuso Bails explicar cómo se podían localizar en un instante determinado. La selección de parte de esa explicación es muy procedente en la actualidad, pues es de sobra conocido el cotidiano uso del GPS (*Global Positioning System*), una de las técnicas de posicionamiento más conocidas de la geodesia espacial; la razón es del todo obvia, los satélites geodésicos se mueven alrededor de la Tierra siguiendo un patrón semejante al que se ciñen los planetas cuando giran en torno al Sol. La localización de los planetas en sus órbitas se efectúa en la Mecánica Celeste por medio de un par de coordenadas polares, definidas a partir del eje mayor de la elipse respectiva (la línea de los ápsides), que juega aquí un papel trascendental.

Dos son las coordenadas que se estudian en la geometría clásica para situar un punto del plano: una distancia (el módulo) y un ángulo (el argumento). La línea maestra de todo el proceso de localización es, como se ha dicho, la línea de los ápsides, siendo el Sol uno de sus puntos básicos y foco de la elipse. El módulo sería aquí el del radio vector que une el Sol con el planeta¹⁷⁰, o como decía Bails: la distancia del planeta al foco de la elipse. Los argumentos se medirán a partir de la referida línea, cuyos extremos serían el afelio y el perihelio, dos puntos a los que Bails llamaba también ápside superior y ápside inferior, respectivamente. En la figura siguiente, análoga a la que incluyó Bails en su exposición, PMDA representa la órbita elíptica del planeta, C el centro de la elipse, M la posición del mismo en un instante dado, SM sería por lo tanto el radio vector anterior, S la imagen del foco ocupado por el Sol, A la del afelio y P la del perihelio; de manera que la línea argumental es la línea AP. En astronomía se denominan a estos

¹⁶⁹ No debiera sorprender semejante afirmación, ya que el calor aumenta con la inclinación de los rayos solares sobre el horizonte: mucho mayor en verano que en invierno.

¹⁷⁰ En el caso del GPS sería el del radio vector que une el centro de la Tierra con el satélite geodésico.

argumentos anomalías y se dividen en tres clases: verdadera, excéntrica y media; aunque generalmente se asocie la anomalía a la distancia angular de un planeta a su perihelio¹⁷¹, las clases se establecen porque cada una se mide de forma diferente.



Los semiejes de la elipse orbital son los segmentos $CP = a$ y $CA = b$. La excentricidad de la elipse viene dada por la relación $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$. La anomalía verdadera cuando el planeta está en M es el ángulo MSR (v), la excéntrica en el mismo instante es el ángulo NCR (E). La anomalía media estaría representada por el ángulo XCP . Dos son las circunferencias principales de la elipse, la que tiene por diámetro el segmento AP (el doble del semieje mayor) y la que tiene por diámetro el segmento DF (el doble del semieje menor).

La anomalía verdadera era definida por Bails como “el ángulo que forma en el foco de la elipse el radio vector con la línea de los ápsides, tal es el ángulo MSP que forman el eje mayor AP y el radio vector SM ”. La anomalía excéntrica es, pese a su nombre, un ángulo central, formado por la línea de los ápsides y el radio de la circunferencia principal¹⁷² y mayor de la elipse, que localiza un punto auxiliar del mismo, el N de la figura anterior, perteneciente a su vez a la ordenada de M (RMN). Tanto esta anomalía como la anterior se expresan en graduación sexagesimal y se

¹⁷¹ A pesar de que Bails lo hiciese realmente desde el afelio, se ha preferido actualizar el concepto y cambiar el origen.

¹⁷² En una elipse con semiejes a y b , tales que $a > b$, se llaman circunferencias principales de la misma las que comparten con ella el centro y tienen de radio a o b . En función de ellas se construye la elipse con suma facilidad.

miden, a partir del eje de la elipse, en sentido directo o contrario al movimiento de las agujas del reloj.

La anomalía media, como la excéntrica, permite situar otro punto auxiliar de la circunferencia principal externa, cuyo diámetro es AP. Como apunta su denominación, se trata de localizar un planeta imaginario que se desplaza por esa circunferencia con velocidad uniforme. Bails lo explicaba muy claramente: “así, un planeta¹⁷³ que gastaría seis meses en ir de P hasta A, tendría al cabo del primer mes 30° de anomalía media, 60° al cabo del segundo y así de los demás, creciendo siempre proporcionalmente al tiempo”. Bails también pretendió representarla, en la misma figura, por medio de la línea CX, estando situado el punto X en la circunferencia principal de mayor diámetro. Ese planeta imaginario X se desplazaría sobre la circunferencia con velocidad uniforme, de modo que al principio del movimiento la línea CX estaría más retrasada que la CN, por avanzar “más despacio hacia el afelio donde el movimiento del planeta es menor que el movimiento medio, y este retraso crecerá mientras que la velocidad del planeta fuese mayor que su velocidad media; después el punto X se iría acercando al punto N, hasta juntarse uno con otro en el afelio A, allí las tres anomalías se confunden y son cabalmente de 180°”. A la diferencia entre la anomalía media y la verdadera se le denomina ecuación del centro. La anomalía media suele representarse por la letra M, pudiendo expresarse en función del llamado movimiento medio, es decir la velocidad circular del planeta imaginario por la circunferencia principal. Dicha velocidad será el cociente $2\pi / T$, siendo T el periodo; como la anomalía media es al fin y al cabo un espacio, será el producto de esa velocidad por el tiempo invertido en alcanzar el valor M, es decir que $M = \Delta t \, 2\pi / T$, el incremento de tiempo Δt es el invertido por el satélite imaginario en pasar del perigeo al punto X; dicho de otro modo, si el instante de paso por el perigeo es t_0 y el del paso por X es t, se tendría $M = 2\pi(t-t_0)/T$.

Definidas las tres anomalías, Bails halló la relación entre ellas, así como la existente entre el radio vector y las dos primeras. Comenzando con esta última, es evidente que dicha relación vendrá impuesta por las propiedades de la elipse. En efecto del simple análisis geométrico de la curva, se obtienen con relativa facilidad las ecuaciones siguientes: $r = a (1 - e^2) (1 + e \cos v)^{-1}$ y $r = a (1 - e \cos E)$, siendo a, el semieje mayor

¹⁷³ Se estaba refiriendo a la Tierra.

de la elipse orbital, e su excentricidad, v la anomalía verdadera y E la anomalía excéntrica; aunque sea obvio, conviene insistir en que las dos ecuaciones anteriores son las de la elipse, en función de las coordenadas polares (r, v) y (r, E) . Tal como indicaba Bails, en el afelio ambas anomalías valen 180° y el radio vector correspondiente valdría $r = a(1+e)$; en el perihelio, por el contrario, donde las dos anomalías son nulas, valdría $r = a(1-e)$, resultando por tanto los dos valores extremos que alcanza la distancia del planeta al Sol. Comparando esas dos ecuaciones de la elipse se pueden deducir diferentes relaciones entre las anomalías verdadera y excéntrica, de entre todas ellas se ha elegido por su sencillez la siguiente: $\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$, que Bails refería así: “luego la tangente de la mitad de la anomalía verdadera PSM es a la tangente de la mitad de la anomalía excéntrica PCN, como la raíz cuadrada de la distancia afelia AS es a la distancia perihelia PS”.

La relación entre la anomalía media y las otras dos es más compleja, pues para hallarla es necesario hacer uso del cálculo diferencial. La más divulgada es la existente entre las anomalías media y excéntrica, mencionada por Bails en estos términos: “La diferencia entre la anomalía excéntrica y la anomalía media es igual al producto de la excentricidad por el seno de la anomalía excéntrica”, es decir que $E - M = e \sin E$, o bien que $M = E - e \sin E$. A esa expresión se le conoce con el nombre de ecuación de Kepler; al tratarse de una ecuación trascendente, no puede ser resuelta exclusivamente por procedimientos algebraicos. Generalmente, la demostración de la ecuación anterior requiere el uso de la ley gravitacional de Newton, si bien Bails usó una de tipo geométrico muy singular, de la que dio cuenta en las páginas 412 y 413 de sus Elementos de Astronomía. A lo largo de la historia se han propuesto multitud de métodos para resolverla, entre los que destacan los iterativos y el gráfico aproximado ideado por John James Waterston, a mediados del pasado siglo XIX; el cual se basó en la intersección de la senoide $y = \sin E$ y de la recta $v = (E-M) / e$. Conocida la anomalía media¹⁷⁴ podría hallarse cualquiera de las otras dos, por medio de desarrollos en serie siguientes:

$$E = M + (e - e^3/8 \dots) \sin M + (e^2/2 \dots) \sin 2M + (3/8) (e^3 \dots) \sin 3M + \dots$$

¹⁷⁴ Solo son válidas las expresiones siguientes en los supuestos en que la excentricidad orbital es pequeña, como ocurre con los planetas principales del sistema solar.

$v = M + (2e - e^3/4) \sin M + (5e^2/4) \sin 2M + (13e^3/12) \sin 3M + \dots$, esta segunda expresión es la de la ecuación del centro, si se pasa M al primer miembro.

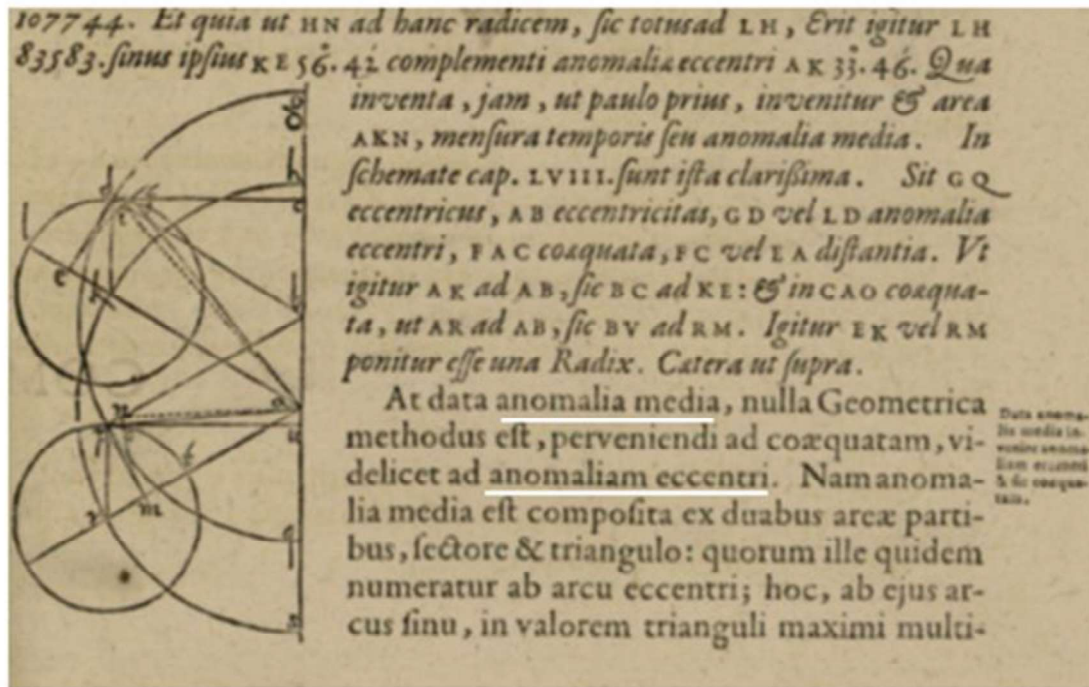


Ilustración usada por Kepler al final del capítulo LX de su *Astronomia Nova*, en que hace mención a la anomalía media y a su relación con la excéntrica, formulando así la ecuación que llevaría su nombre: $M = E - e \sin E$.

Elementos de Astronomía Física

Esta tercera contribución de Bails la incluyó, como ya se comentó, en el tomo VIII de sus *Elementos de Matemática*. Para él se trató de una parte sustancial del volumen, puesto que su desarrollo ocupó la tercera parte del mismo y su prólogo fue exclusivamente astronómico. En esta ocasión abordó las cuestiones astronómicas desde un punto de vista más físico que geométrico, concediéndole una importancia capital. Para Bails constituían estas “la materia más sublime de toda la Matemática mixta, donde resplandece la portentosa penetración del inmortal Newton, cuyos descubrimientos en esta materia propondremos por un término que los haga más asequibles para el común de los lectores. Lo que dijéremos facilitará la inteligencia de lo que han escrito los mayores Matemáticos de este siglo, con el fin de aclarar los puntos más arduos de la física celeste”.

En su declaración de intenciones concretó los aspectos más relevantes sobre los que pensaba incidir: “las masas de los planetas, como se ajusta su movimiento eclíptico a las leyes de la fuerza con que unos obran en otros,..., finalmente como cuadran sus leyes con el fenómeno de la precesión de los equinoccios. Pero antes de todo se nos ha preciso probar la existencia, y las leyes de dicha fuerza conocida de todos con el nombre de *Atracción o Gravitación general*”. Siendo Bails consciente de que para ello se requerían conocimientos matemáticos y físicos más específicos, realizó una especie de vademécum previo con “proposiciones de cálculo y de dinámica”. De entre los primeros subrayaremos su deducción de las fórmulas que le permitirían calcular la superficie y el volumen del elipsoide de revolución, que él denominaba esferoide aplanado. De entre las segundas cabe destacar su explicación¹⁷⁵ para hallar “lo que duraba la oscilación del péndulo”, ya que apoyándose en ella obtuvo la longitud del que batía segundos en el ecuador y concluyó que “los graves andan debajo del ecuador 15.0515 pies en un segundo y 15.117 en el Norte. De donde se sigue que por ser entre sí estos espacios como 230 a 231, la pesantez debajo del círculo polar es 1/230 menor que debajo del ecuador”.

Concluida su introducción físico-matemática, se adentró Bails en el estudio filosófico del principio de la gravitación universal, partiendo de la imperiosa necesidad de que existiese el vacío para que esta pudiera llevarse a efecto: “si los cuerpos celestes se movieran en un espacio lleno de algún fluido, estaría aniquilado días ha su movimiento”. Admitida la posibilidad de la atracción, fue analizada bajo los tres epígrafes siguientes: Necesidad de la atracción, Pruebas de la atracción y leyes de la atracción. Así llegó Bails a que la masa de los planetas y su gravedad específica se podían inferir a partir del principio de la atracción. A continuación comparó la masa de la Tierra con la de Júpiter¹⁷⁶, siguiendo un proceso análogo al que le permitió a Newton calcular las masas y las densidades de los planetas: “cuanto más un satélite dista de su planeta, y cuanto más aprisa gira, tanto más fuerza y materia arguye en el planeta principal que le detiene”.

¹⁷⁵ Es reseñable por la relación que establecía entre la geodesia geométrica y la geodesia física (gravimetría), en tanto que introdujo la interdependencia entre el aplastamiento geométrico y el gravitatorio.

¹⁷⁶ Teniendo en cuenta sus atracciones sobre los satélites respectivos.

Ha de tenerse presente que cuando Bails redactó su trabajo, aún no se habían descubierto Neptuno y Urano, y los satélites de Marte¹⁷⁷. Se comprende así que comentase la imposibilidad de evaluar las densidades de Venus, Mercurio y Marte por el procedimiento anterior: “porque estos planetas no tienen satélites que nos puedan manifestar la intensidad de su atracción. Pero como reparamos en los tres planetas, cuyas densidades conocemos, un aumento de densidad, conforme están más próximos al Sol, parece natural que este aumento se verifique igualmente en los otros tres planetas”. Más adelante recordaba la clásica relación entre masa, distancia y gravedad, con estas palabras: “después de conocida la masa y el diámetro de un planeta, se determinan fácilmente los efectos que causa en su superficie la pesantez; quiero decir la fuerza aceleratriz de los graves en el planeta, porque esta fuerza sigue la razón de la masa y la razón inversa del cuadrado del radio”.

Bails insistía en la misma cuestión, recordando que en el tomo IV de sus Elementos de Matemática ya había probado que cuando “la fuerza central es en razón inversa del cuadrado de la distancia, el móvil traza una de las secciones cónicas. También podríamos probar la proporción inversa, es a saber, que cuando un móvil traza con su movimiento una sección cónica, la fuerza central que le detiene en la curva de su revolución obra en razón inversa del cuadrado de la distancia”. Bails procedió aquí en consecuencia, aunque solo lo hiciese para la parábola y para la eclipse, señalando que al haber demostrado en su momento el carácter elíptico de las órbitas de los planetas alrededor del Sol, “síguese de lo que acabamos de probar... que son impelidos o atraídos hacia el Sol con una fuerza que sigue la razón inversa del cuadrado de las distancias”.

La aparente uniformidad de la exposición astronómica de Bails, válida para los supuestos en que cada planeta solo fuese atraído por el Sol, no se ajustaba verdaderamente a la realidad, puesto que existían otra serie de atracciones, de menor entidad pero de efectos perfectamente perceptibles y calculables, los cuales eran en su opinión “los más importantes y dificultosos de toda la astronomía especulativa”. A tales desigualdades y perturbaciones orbitales, producidas de manera continua, se dedicaban a

¹⁷⁷ Urano fue descubierto por William Herschel en 1781. Neptuno lo fue por Urbain Le Verrier en 1846, aunque tres años antes hubiese calculado su órbita el joven astrónomo inglés John Couch Adams. En cuanto a los dos satélites de Marte: Fobos y Deimos, fueron descubiertos por el estadounidense Asaph Hall en 1877.

porfía “los Astrónomos y Geómetras de estos tiempos”, como bien señalaba Bails. A ello dedicó este interesante apartado “*De las desigualdades que ocasionan las atracciones mutuas de los cuerpos celestes*”, una difícil cuestión de la mecánica celeste en la que se generalizó el problema de la órbita kepleriana simple, para abordar con el rigor debido otro mucho más complejo, que Bails enunció así: “en esto consiste la dificultad de la cuestión de los tres cuerpos que consiste en determinar los movimientos de tres cuerpos ...que se atraen mutuamente en razón directa de sus masas, y en la razón inversa de una potencia de las distancias”. Después de haber deducido la ecuación de la trayectoria final¹⁷⁸, aplicó sus resultados para determinar los valores de las desigualdades causadas por el Sol en el movimiento de la Luna, o las que Júpiter ocasionaba en la propia órbita que describía la Tierra alrededor del Sol.



Estatua de Newton en el Trinity College de Cambridge y un grabado con el aspecto que tenía al obtener su licenciatura en el mismo (Bachelor of Arts. 1665).

Comentaba Bails que a través de la ecuación de esas órbitas perturbadas podía describir tanto el movimiento continuo de la línea de los ápsides, “un movimiento lento de occidente a oriente”, como efectuar la acotación de sus desigualdades periódicas. Más adelante llegó a concretar incluso el movimiento del afelio de la Tierra, de casi $6''.5$, como consecuencia de la atracción ejercida por Júpiter. Bails añadía otras posibles causas, del movimiento anterior, especialmente determinantes: el aplastamiento de los planetas, que afectaría a la Luna y a los demás satélites, y una segunda que

¹⁷⁸ La órbita turbada, según Bails

asociaba a la posible resistencia de la materia etérea, aunque “después de consideradas las observaciones más antiguas no se percibe en las órbitas mudanza alguna que arguya resistencia en la materia etérea...porque está averiguado que la resistencia del fluido causaría un movimiento del afelio mucho menos reparable que la mudanza en la duración de la revolución; esta mudanza no se verifica, sensiblemente por lo menos, luego el movimiento de los ápsides no proviene de la resistencia”.

Otra consecuencia notable que fue analizada detalladamente por Bails fue la del movimiento de los nodos planetarios. En primer lugar la estudio para el caso de la Luna, ejerciendo el Sol el papel de planeta perturbador: “es evidente que en todos tiempos la fuerza atractriz del Sol obra para acercar la Luna al plano de la eclíptica...en la cual está el Sol”, coligiendo que la línea nodal se vería siempre afectada por un movimiento retrogrado, a la vez que resultaría modificada la inclinación de su plano orbital. Bails extrapoló sus conclusiones, sobre los efectos perturbadores, a los nodos planetarios y a las inclinaciones de sus órbitas; añadiendo que “este movimiento del nodo para cada instante es diferente por razón de la distancia del planeta perturbador al mismo nodo. Hemos, pues, de buscar primero una expresión general del movimiento del nodo en un instante infinitamente pequeño y sacando después su integral, determinaremos el movimiento para una revolución entera”. Bails dedujo esta última expresión apoyándose en la perturbación que ejercía el planeta Júpiter sobre la órbita terrestre, siguiendo un procedimiento idéntico al que había usado Lalande para hallar el movimiento de los nodos de cada planeta por la acción de todos los demás. De ese modo demostró que el movimiento del nodo correspondiente a una revolución completa de la Tierra ascendería a $6''.9$. Asimismo determinó el correspondiente a la línea nodal de la Luna, fijándolo en $1^{\circ} 26'48''$ para cada revolución orbital¹⁷⁹.

Todas las consideraciones anteriores fueron pormenorizadas por Bails para que sus lectores potenciales, y por supuesto sus alumnos de la Academia de San Fernando, tuviesen más elementos de juicio para comprender mejor una cuestión tan revesada como la precesión de los equinoccios; así venía a confirmarlo el propio autor cuando, al comenzar a tratar de la misma,

¹⁷⁹ Bails supuso nulas la paralaje del Sol, la excentricidad de la órbita lunar, la del Sol y todas las desigualdades de la Luna, añadiendo “no hay duda en que cuando se desprecian menos cosas, se saca este movimiento mucho más conforme con la observación”; de hecho el valor que dedujo realmente fue de $1^{\circ} 30'38''$.

afirmaba: “la precesión de los equinoccios o el efecto de las atracciones que el Sol y la Luna obran en el esferoide de la Tierra, es un punto de los más dificultosos de toda la Astronomía Física. Muchos matemáticos se han empeñado en su investigación, y todos han sacado resultados diferentes”. Bails dedicó al asunto cuarenta páginas (158-198) de este tomo VIII de sus Elementos de Matemática, haciendo uso del cálculo diferencial e integral, aunque al final no propusiera fórmulas generales que cuantificasen su magnitud y sus variaciones con el tiempo, tampoco analizó como resultaba alterada la posición de las estrellas sobre la esfera celeste, en función de sus coordenadas ecuatoriales¹⁸⁰.

Ello no impide que se tenga que valorar el esfuerzo didáctico de este trabajo de Bails, como evidencia el siguiente párrafo:

“ la teórica del movimiento de los nodos hace que un planeta que gira en el plano de su órbita, es apartado de ella incesantemente por los demás planetas, lo propio sucede con las partes del esferoide terrestre, las cuales por ser más altas hacia el ecuador...son desviadas de su movimiento natural por las atracciones laterales del Sol y de la Luna, como si la porción de materia que podemos suponer pegada al globo se compusiese de mucho número de planetas que en el discurso de veinticuatro horas diesen la vuelta alrededor de la Tierra”. Primeramente se centró en valorar la perturbación causada por la atracción solar y el influjo de esta sobre la precesión de los equinoccios, hallando la fuerza ejercida por el Sol sobre una partícula del meridiano terrestre y expresándola como el cociente entre la masa solar y el cuadrado de la distancia entre el Sol y la referida partícula. Seguidamente procedió a obtener la fuerza total “que de ella resulta para hacer dar la vuelta a toda la elipse del meridiano, y después al esferoide”.

Refiriéndose al momento de la fuerza, aseguraba:

“no se percibe desde luego que producto dará una fuerza multiplicada por una línea, pero nos bastará determinar la suma de todas estas fuerzas de rotación expresadas de este modo, las compararemos con las de otro cuerpo cuyo movimiento fuese conocido...y de aquí inferiremos el movimiento del

¹⁸⁰ Los movimientos relativos de los planos del ecuador y de la eclíptica, por las interacciones planetarias, hacen que resulte afectado el ángulo de la oblicuidad y la línea de intersección de ambos. Una de sus consecuencias es que varíen las coordenadas astronómicas que tiene su origen en el punto Aries (equinoccio de primavera), de ahí la importancia de averiguar el valor de esas variaciones.

ecuador terrestre...Lo que acabamos de demostrar respecto de la elipse...que forma el meridiano o la sección del esferoide terrestre en la dirección de su eje, lo demostraríamos igualmente respecto de otra sección cualquiera de la Tierra paralela al meridiano; porque todas estas secciones son elipses semejantes al meridiano. Luego conocemos la fuerza del Sol en una elipse que es parte de un esferoide, podremos imaginar otra elipse, u otra sección del esferoide infinitamente próxima a la primera, y paralela con ella¹⁸¹, siendo du la distancia de una a otra, la fuerza de toda la elipse multiplicada por du dará la fuerza de toda la rebanada sólida que es el elemento del esferoide. Integrando, sacaremos la fuerza del esferoide total, o la energía total con que la atracción del Sol en todas las moléculas conmueve la Tierra”.

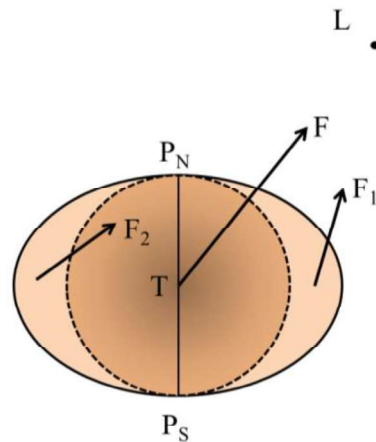
Continuaba Bails señalando que a partir de esa fuerza total ejercida por el Sol debería deducirse el ángulo que el eje del mundo debería trazar a impulsos de la misma: “de modo que el plano del ecuador de la Tierra se debe inclinar hacia el Sol girando alrededor de uno de sus diámetros, en el mismo tiempo que gira por la rotación diurna alrededor del eje del mundo que es perpendicular a su plano”. El problema lo dividió Bails en las dos cuestiones siguientes:

1) *Sea R un corpúsculo de materia, que gira uniforme y libremente en una circunferencia $ARFB$ igual al ecuador terrestre, de occidente a oriente, en el mismo tiempo que el plano del ecuador gira de Norte a Sur, alrededor del diámetro AB con un movimiento infinitamente más lento, cuya velocidad sea r , en el punto F donde es máxima. Se pregunta qué fuerza ha de conmovier el corpúsculo R en cada punto del arco AF , o cada instante, perpendicularmente al plano del ecuador, a fin de que pueda siempre permanecer en el plano que gira alrededor del diámetro AB .*

2) *Si todas las partículas de un esferoide $EPQO$ son solicitadas de fuerzas paralelas al eje PO , proporcionales a la distancia de cada parte al plano que pasa por PO , o a un meridiano, conforme hemos probado que debe ser para que el ecuador se mueva una cantidad r de Norte a Sur; y si las dos mitades PEO , PQO del esferoide son solicitadas igualmente y hacia direcciones contrarias, la suma de todas estas fuerzas, o la eficacia de la fuerza total que se empleare en hacer girar el esferoide alrededor de su*

¹⁸¹ Se supone que u es la distancia del centro de la rebanada al de la Tierra.

centro, será la quinta parte de la que se verificaría, si todas las partes del esferoide estuviesen juntas a la distancia CQ del radio del ecuador.

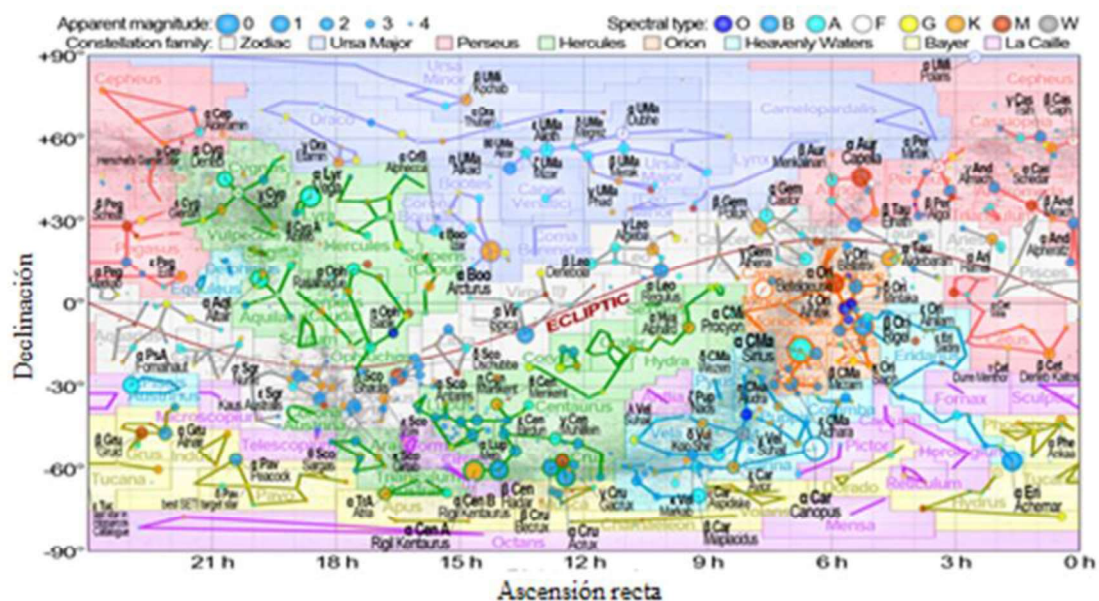


Precesión producida sobre el elipsoide al ser atraído por un cuerpo externo (L). La fuerza total se compone de la atracción de la esfera y de otras dos que actúan sobre las mitades de las protuberancias ecuatoriales. F_1 es mayor que F_2 por estar su punto de aplicación más cerca de L. Por ese motivo, la atracción de L hace que gire el eje de rotación del elipsoide $PN PS$, de manera que su plano ecuatorial tienda a contener la dirección TL . El eje polar se desplazaría perpendicularmente al plano en que se encuentran las dos fuerzas F_1 y F_2 . La precesión se anula cuando el Sol y la Luna se encuentran en el plano del ecuador terrestre y son máximas cuando están más alejados del mismo. (P.I. Bakulin, E.V. Kononovich, V.I. Moroz. Curso de Astronomía General, página 137).

Finalmente obtuvo Bails la precesión para un tiempo finito, tras hallar antes “la diferencial de la precesión de los equinoccios, en cuanto pende del Sol”, y determinar, al integrarla, “la precesión de los equinoccios para el tiempo que gastó el Sol en andar un arco de la eclíptica”, aunque añadiese que despreciaría la segunda parte de la expresión obtenida por no ser mayor de un segundo. No obstante, la parte sustancial siempre era creciente, lo que probaba que la precesión crecía continuamente como la longitud del Sol. Bails dedujo incluso su valor numérico de $5''.28$, para un periodo de tres meses, “por consiguiente su cuádruplo $21''.12$ será la precesión media anua de los equinoccios causada por la acción del Sol¹⁸², suponiendo la Tierra homogénea, y el aplanamiento $1/230$ ”.

¹⁸² De la fiabilidad de su resultado da idea la información complementaria del propio Bails “por las observaciones esta cantidad no pasa de $16''$, y se verá luego”.

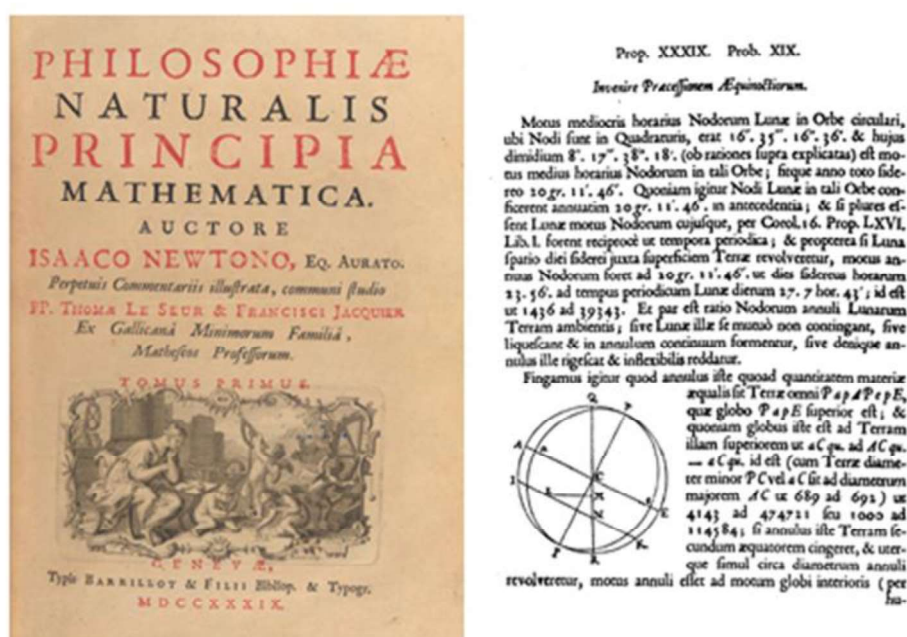
La siguiente etapa abordada por Bails fue el cálculo de la influencia ejercida por la Luna sobre el elipsoide terrestre, similar al que había seguido para el Sol, con la salvedad de que “hemos de llevar en cuenta en este cálculo la situación de los nodos de la Luna, y esto nos precisará a ejecutar una operación trigonométrica más, porque la declinación cuyo seno y coseno entran en las fórmulas antecedentes incluye el lugar del nodo, cuando se trata de la Luna, cuya oblicuidad respecto del ecuador no es constante como la de la eclíptica”. Teniendo en cuenta tal circunstancia, partió en un principio de que la precesión causada por la Luna sería 2.5 veces la del Sol, pues igual relación era la existente entre la atracción ejercida sobre la Tierra por ambos cuerpos celestes. Sin embargo, Bails corrigió el resultado por la práctica de las observaciones y por la heterogeneidad de la Tierra, de manera que supuso que la relación entre las dos atracciones fue de 2.25 en lugar de 2.5, y que la precesión causada por el Sol sería de $15''.5$ en vez de $21''$; esto es que la precesión media ocasionada por la Luna ascendería solamente a $35''$.



La banda zodiacal como desarrollo de una zona cilíndrica, tangente a la esfera celeste a lo largo del ecuador. La imagen del ecuador será pues una recta y la de la eclíptica una especie de senoide que tiene su punto de inflexión en la anterior.

La disertación de Bails finalizó con una explicación que pretendía aclarar el modo en que variaba la oblicuidad de la eclíptica por la influencia de la Luna, subrayando que cuando su nodo ascendente se encontraba en el punto Aries la Luna se apartaba más del ecuador “ y tiene más fuerza para

mudar el plano del ecuador y por lo mismo la oblicuidad de la eclíptica...; es preciso tener presente que la mudanza del ecuador no se hace en el punto donde obra la Luna, sino 90° más allá...esta es cabalmente la razón porque la oblicuidad de la eclíptica es la mayor en el tiempo que la acción de la Luna en el ecuador está en una situación menos acomodada para obrar este aumento, y parece que debería causar un efecto contrario”.



Cubierta de la quinta edición latina de los Principia de Newton, publicada por los matemáticos T. Leseur y F. Jacquier (Ginebra: 1739,40 ,42). Se añade una página de la primera edición (1687), en la que se trata de la precesión de los equinoccios.

Quizás fuese Laplace, en el apartado 44 del capítulo VI de su Mecánica Celeste¹⁸³, el que halló por vez primera unas expresiones generales para las variaciones lentas de los planos del ecuador y de la eclíptica, similares a las que se emplean en la actualidad. Para poder concretar mejor esos movimientos recurrió al círculo máximo determinado por la eclíptica a comienzos del año 1750. Las atracciones ejercidas por el Sol y por la Luna sobre el elipsoide terrestre, ocasionaban un movimiento del eje del mundo, y por tanto del ecuador, con respecto a esa eclíptica fija. A causa del mismo, los puntos de intersección de ambos círculos tendrían un movimiento lento y retrogrado en el plano fijo y otro periódico dependiente de la localización del Sol y de la Luna, así como de la posición de la línea

¹⁸³ *Traité de mécanique céleste* (1799-1825, 5 vols.)

nodal de esta última. El primero de dichos movimientos recibió el nombre de precesión luni-solar y el segundo de nutación luni-solar en longitud. Por otro lado, las atracciones mutuas de los planetas originan variaciones de la inclinación y posición de las líneas en que sus planos orbitales cortan a esa eclíptica fija, con la que coincidía el año 1750; de tal hecho se deriva otra variación en la inclinación de la eclíptica verdadera con respecto al ecuador, llamada precesión planetaria. El movimiento de los puntos de intersección del ecuador y de la eclíptica verdadera sobre esta última, se denomina precesión general.

Las fórmulas deducidas por Laplace se podían emplear para los 1200 años anteriores y posteriores a la época de 1750. Bessel las desarrolló según las potencias del tiempo transcurrido desde 1750 y las presentó en el prólogo de sus celebradas *Tabulae Regiomontanae* (1830), con aproximaciones hasta la segunda potencia del tiempo. Según ellas, la precesión anua luni-solar para la época $1750 + t$, vendría dada por:

$$\Psi_1 = 50''.37572 - 0''.000243589 t,$$

En cambio, la general anua sería:

$$\Psi = 50''.21129 + 0''.0002442966t,$$

Finalmente, el valor de la oblicuidad media de la eclíptica, para la misma época¹⁸⁴, respondía a la fórmula:

$$\varepsilon = 23^\circ 28' 18''.0 - 0''.48368 t - 0''.00000272295 t^2.$$

El cálculo de las variaciones de las coordenadas ecuatoriales de las estrellas por los efectos de la precesión, puede efectuarse partiendo de las relaciones diferenciales aplicadas a las fórmulas de trigonometría esférica que resuelven el triángulo formado por los polos del ecuador y de la eclíptica, así como por la estrella. Unos de los resultados posibles se expresan a continuación:

$$d\delta = \cos \eta d\beta + \sin \varepsilon \cos \alpha d\lambda + \sin \alpha d\varepsilon,$$

$$d\alpha = (-\sin \eta d\beta - \cos \alpha \sin \delta d\varepsilon + \cos \beta \cos \eta d\lambda) / \cos \delta.$$

Ahora bien, cuando el intervalo de tiempo considerado no es muy grande se puede hacer la simplificación de suponer que $d\lambda$ es igual a $\Psi\tau$, siendo τ la

¹⁸⁴ Sin tener en cuenta los términos periódicos de la nutación.

amplitud del mismo, a la vez que se consideran constantes la latitud y la oblicuidad, es decir que $d\beta = d\varepsilon = 0$. En tal supuesto las dos fórmulas anteriores se convertirían en estas otras:

$$d\delta = \Psi\tau \cos \alpha \sin \varepsilon \text{ y } d\alpha = (\Psi\tau \cos \beta \cos \eta) / \cos \delta,$$

no obstante, la simplificación puede ser aún mayor si se expresa el coseno del ángulo paraláctico ($\cos \eta$) en función de los otros elementos del triángulo referido, resultando así que:

$$d\delta = \Psi\tau \cos \alpha \sin \varepsilon \text{ y } d\alpha = \Psi\tau (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tag} \delta),$$

el par (α, δ) correspondería al inicio del intervalo y el (α', δ') al final del mismo, bien entendido que $d\alpha = \alpha' - \alpha$ y $d\delta = \delta' - \delta$. En los casos en que la amplitud considerada fuese mayor de diez años, habría que completar los desarrollos con las derivadas segundas $d^2\alpha / dt^2$ y $d^2\delta / dt^2$, ya que las derivadas primeras $d\alpha / dt = (\alpha' - \alpha) / \tau$ y $d\delta / dt = (\delta' - \delta) / \tau$ no serían constantes. A esas primeras derivadas se les identifica con el nombre de variaciones anuales y a las segundas con el de variaciones seculares, puesto que son los cambios de las anuales en un siglo¹⁸⁵.

Concluido el estudio de esa última corrección astronómica, decidió Bails complementar la información que ya había proporcionado sobre el cómputo del tiempo en otros lugares de su obra. En esta ocasión lo encuadró en el capítulo denominado *Elementos de Cronología, donde se trata particularmente del calendario*; el cual procedía analizar en este momento, por estribar sus fundamentos en la comparación de los movimientos del Sol y de la Luna “y de ambos con los sucesos de la historia, es esta ciencia un ramo de la Matemática dependiente de la Astronomía, igualmente que el uso continuo que hacemos del Calendario”. No en vano, como bien subrayaba Bails, las horas en la antigüedad se contaban al nacer el Sol y se identificaban con el nombre de los siete planetas, tal como hicieron tanto los egipcios como los caldeos, de acuerdo con las crónicas de Herodoto; sin embargo, la asociación fue más allá al pensar que los planetas ejercían su influencia sobre las diferentes horas del día y que resultaba natural identificar a estos con el nombre de aquellos. Bails explicó con cierto

¹⁸⁵ En los catálogos más exactos se incluyen los terceros términos de los desarrollos de α y δ , por la fórmula de Taylor.

detalle la secuencia primitiva: “el domingo¹⁸⁶, al nacer el Sol, la primera hora era para el Sol, seguíanse después Venus, Mercurio, la Luna, que se suponía debajo de él, después Saturno, Júpiter y Marte que se suponían encima. Seguían de aquí que el día siguiente empezaba por la Luna, y esta es la razón porque el día de la Luna, esto es, el Lunes se siguió inmediatamente después del día consagrado al Sol”.

Bails hizo ver la imposibilidad de concretar el lugar en que se inició ese cómputo semanal. No obstante señalaba que se empleaba desde muy antiguo en oriente y en Perú, a la vez que recordaba como algunos cronistas referían que los griegos habían sido los únicos que no usaron las semanas y otros, por el contrario, defendían que solo se consideraban entre los judíos; para terminar afirmando lo siguiente: “como quiera, no se puede negar que el número siete fue muy notable y distinguido entre los antiguos”. En cambio fue más claro al precisar su origen, al manifestar que probablemente estuviese asociado a las fases lunares, “que no se dejan ver sino por espacio de cuatro semanas o 28 días...estas fases varían con corta diferencia cada siete días, y si las semanas se hubiesen hecho de ocho días, hubieran sobrado tres días al cabo de un mes”. Por otro lado, como el año solar de 365 días podía dividirse en 52 semanas, con el resto de un día, resultaba consecuente pensar que la costumbre de dividir el tiempo en meses y años hubiese propiciado el establecimiento definitivo de la semana de siete días.

Se refirió después Bails a los diferentes años que se usaron en la antigüedad, comenzando con los llamados egipcios de 365 días y con los lunares de turcos y árabes, de 354 y 355 días respectivamente, aunque acabase imponiéndose la tradición de los primeros. Su principal inconveniente estribaba en que el Sol se retrasaba cada año seis horas y el equinoccio tenía lugar un día más tarde transcurridos cuatro, de manera que al cabo de 1461 años el atraso era exactamente de un año. Recordaba asimismo la práctica actual de considerar unas veces años de 365 días y otras de 366 días, iniciándose siempre el día 1 de enero; conservándose

¹⁸⁶ En los idiomas no latinos, es más clara la identificación del séptimo día de la semana con el Sol: *Soontag* (alemán), *Zondag* (holandés), *Sunday* (inglés). La denominación de domingo proviene del latín *dies Dominicus*, día del Señor. Fue instaurada por el emperador Constantino cuando se convirtió al cristianismo. A pesar de ello conviene tener presente que dicho emperador era muy devoto de Mitra, dios del Sol, de origen persa que se integró en la cultura romana. Resulta pues evidente que aún perdura, en cierta medida el culto al Sol tan arraigado en diferentes culturas y civilizaciones. Me permito traer a colación que el rezo del *Angelus* recuerda sobremanera al canto que los sacerdotes de Egipto hacían al Sol en el momento de alcanzar su máxima altura sobre el meridiano (mediodía).

pues la costumbre impuesta por Numa Pompilio. En cambio, los antiguos romanos lo empezaban el 1 de marzo, mientras que los griegos lo hacían el 1 de septiembre. Bails apuntaba que lo más natural hubiera sido empezar el año con la primavera, pero que se optó por el mes de enero debido a que con el solsticio de invierno el Sol volvía a desplazarse por el hemisferio boreal: “pareció que este principio de elevación e incremento de los días debía ser el principio del año”.



El rey Numa y su esposa, la ninfa Egeria. Cuadro pintado por Anton Raphael Mengs en 1770.

Ya se comentó en este mismo capítulo la implantación de los meses en el imperio romano, que alternativamente eran de 29 y 30 días, para corresponder de esa manera a los lunares de 29.5 días. Fue también el rey Numa el que incorporó dos más para conformar el nuevo año de doce meses, indicando Bails que “mudó los seis meses que tenían 30 días para hacerlos impares; estos seis días, con los 51 que añadió antes, eran 57, con los cuales hizo dos meses, el uno de 29 días y el otro de 28”. Sin embargo este ajuste del año lunar, de 355 días, para que empezase en el invierno¹⁸⁷, presentaba un serio inconveniente. En efecto, como el año solar tenía diez días más, al pasar tres años el invierno no empezaría a principios de enero sino que lo haría al empezar febrero. Como su pretensión fue de que el

¹⁸⁷ A partir del solsticio de invierno era cuando comenzaban a crecer los días.

inicio del año coincidiese siempre con el comienzo de enero, recurrió al artificio de intercalar los días que fuesen necesarios: “pasados dos años, se añadieron 22 días, después de pasados cuatro años, se añadieron 23 días, en el sexto 22 días, en el octavo 23; de suerte que en ocho años se intercalaban 90 días”. A pesar de ello, las intercalaciones, que debían efectuar los sacerdotes, no lograron alcanzar un cómputo racional de los años, tal como aclaraba Bails: “hubo tiempos en que por superstición omitieron las intercalaciones y sucedió también que los sacerdotes, con algunos fines particulares, hicieron años más o menos largos”.

Tal era la confusión existente con el calendario que Julio Cesar decidió remediarla de inmediato, para que de ese modo se ajustasen mejor las estaciones a la ocurrencia de los correspondientes fenómenos astronómicos. Una vez conseguida, se contarían los mismos meses en una determinada estación y la primavera caería siempre en la misma época del año. Bails revelaba que el emperador era aficionado a la astronomía y que incluso había escrito algunas obras sobre ese particular. Para obrar con el mayor acierto posible mando llamar a Roma al astrónomo alejandrino Sosígenes, responsabilizándolo directamente de la reforma. Aunque Bails diera a entender que Cesar solo consultó con este astrónomo, lo cierto es que son varios los historiadores que aseguran lo contrario.

Plutarco, por ejemplo, citó en su biografía del emperador¹⁸⁸ que consultó a los mejores filósofos y matemáticos, antes de proceder a la reforma definitiva. Aunque parezca seguro que la adopción del año solar con 365.25 días fuese recomendada por Sosígenes, puede que la idea ya fuese sugerida mucho antes por Callippus (Calipo de Cícico), otro astrónomo griego discípulo de Eudoxo de Cnidos. Todo lo que comentó al respecto Plinio el viejo fue que durante el mandato de Cesar el astrónomo Sosígenes le ayudó

¹⁸⁸ LIX.- La disposición del calendario y la rectificación de la desigualdad causada por el tiempo, examinadas y llevadas a cabo por él a la luz de una exacta filosofía, hicieron su uso muy recomendable, pues que los Romanos, desde tiempos antiguos, no sólo traían perturbados los períodos de los meses en cada un año, de manera que las fiestas y los sacrificios, alteradas las épocas poco a poco, venían ya a caer en las estaciones opuestas, sino que para el mismo año solar los más no tenían cuenta alguna, y los sacerdotes, que eran los únicos que la entendían, de repente, y sin que nadie tuviera de ello conocimiento, entremetían el mes intercalar, al que llamaban mercedonio, introducido primero por el rey Numa para ser un pequeño y no cierto remedio del error padecido en la ordenación de los tiempos, según que en la vida de aquel rey lo dejamos escrito. Mas César, habiendo propuesto este problema a *los mejores filósofos y matemáticos* por los métodos que ya entonces estaban admitidos, halló una corrección propia y más exacta, en virtud de la cual los Romanos parece que son los que menos yerran acerca de esta anomalía del tiempo; y, sin embargo, aun esto dio ocasión de queja a los que censuraban y sufrían mal su poder, pues se cuenta que diciendo uno: “Mañana sale la Lira”, le respondió Cicerón: “Sí, según el edicto”: como que aun esto lo admitían por fuerza.

a fijar la duración del año de acuerdo con el Sol¹⁸⁹. El poeta e historiador cordobés Marco Anneo Lucano, sobrino de Séneca, comentó en su *Farsalia* (Libro X) que Cesar intentó implantar el calendario estacional de Eudoxo, atribuyéndole la frase *nec mens Eudoxi vincetur fastibus annus*¹⁹⁰. Asimismo Theodor Mommsen¹⁹¹, uno de los mayores expertos en la Roma antigua, defendía que Cesar “...con la ayuda del matemático griego Sosígenes introdujo en su imperio un año agrícola de acuerdo con las reglas del calendario egipcio de Eudoxo, aparte de un sistema racional de intercalación con fines religiosos y civiles¹⁹²”.

En todo caso parece incontestable que Sosígenes aconsejó al Cesar una reforma radical que abandonase la Luna en favor del Sol, con la precaución de aumentar en un día la duración del año, atendiendo al exceso del cuarto día sobrante en el que tenía 365.25. El procedimiento propuesto por el astrónomo fue hacer tres años de 365 días y un cuarto de 366, sin modificar la correspondencia establecida entre el principio del año y el del invierno, para no apartarse demasiado de la ortodoxia romana. Bails indicó que la reforma tuvo lugar el año 45 antes de Cristo y que el primer año juliano fue el 44. “el equinoccio se verificó el 25 de septiembre, se alargó el año 90 días hasta la Luna nueva que se siguió al solsticio de invierno, de modo que el año tuvo aquella vez no más 444 días y se le llamó *Año de confusión*”. Como el año de Numa solo tenía 355 días, hubo que añadirle 10.

Cesar decidió que se repartieran de manera que no resultasen afectados los meses de marzo, mayo, quintil (luego julio) y octubre, ya que Rómulo había fijado su duración en 31 días. Los meses alterados fueron por tanto los siguientes: enero, sextil (convertido después en agosto) y diciembre, que pasaron a tener también 31 días en lugar de 29, abril, junio, septiembre y noviembre, que de 29 días pasaron a tener 30. Macrobio escribió el texto aclaratorio: *Ne deum inferum religio immutaretur*¹⁹³, que aclara la inalterabilidad del mes de febrero por estar consagrado a los difuntos. No obstante, el emperador optó por agregar a febrero el día intercalar que

¹⁸⁹ Historia Natural, Libro XVIII, capítulo 25. Plinio añadió también: “aún el mismo Sosígenes aunque más diligente que los otros, no dejó en tres comentarios que escribió sobre ellos dudar corrigiéndose a sí mismo”.

¹⁹⁰ “y mi año no será inferior al calendario de Eudoxo”.

¹⁹¹ Nobel de literatura alemán en 1902, por su obra Historia de Roma.

¹⁹² Mommsen aludía aquí al calendario que figuraba en el papiro con el tratado astronómico conocido como *Ars Eudoxi*, aunque no haya evidencias de una clara conexión entre las ideas de Sosígenes y el texto de Ars.

¹⁹³ *In Somnium Scipionis*. Libro II, página 222. Edición de 1586.

debería figurar cada cuatro años, “después del día 23 de febrero, o el día 7 de las Calendas de Marzo...este día, en vez de ser el 24, era entonces el 25, y el 24 que era el día intercalar, se llamaba *Bis sexto Calendas Martias*”. De ahí el nombre de año bisiesto, como ya quedó dicho en su momento.



Dos imágenes del cometa de Julio Cesar. La primera es la estrella de ocho puntas grabada en el reverso de un denario acuñado por Augusto, por primera vez entre los años 19 y 18 a.C. En el anverso figura el busto laureado del emperador. La segunda es un óleo pintado por E.J. Poynter, en 1883, representando a Julio Cesar junto a Calpurnia, su última esposa, la cual le muestra la alarmante estela que apareció en el cielo. El cuadro del pintor inglés puede inducir al error, ya que aunque el cometa apareció el mismo año en que murió Julio Cesar, lo hizo después de que fuese asesinado, creyendo que se trataba de una manifestación de su alma.

Después del asesinato de Julio Cesar se perdió el control de las intercalaciones. Bails fue demasiado prudente al afirmar que los Pontífices¹⁹⁴ no entendieron las instrucciones recibidas, hasta el extremo de añadir un día al comienzo del año en vez de hacerlo al finalizar el mismo. Con semejante proceder “hacían bisiesto el cuarto año contando el

¹⁹⁴ En la antigua Roma se trataba de una autoridad religiosa relevante, el *Pontifex Maximus* ostentaba la mayor representación. El paralelismo con la denominación actual es obvio.

antecedente, por manera que no había sino dos años comunes, siendo así que debe haber tres años entre dos años bisiestos; se advirtió este error al cabo de 36 años, había habido entonces 12 bisiestos, siendo así que no debía haber habido más que nueve”. El remedio lo puso su sucesor Augusto, al ordenar que no se efectuase intercalación alguna en los próximos doce años, “a fin de quitar con esto tres días a la serie y al orden de los años que Julio Cesar había dispuesto”.

Esta breve referencia a tan importantes personajes de la antigüedad, hace aconsejable, en este contexto astronómico, recordar un fenómeno celeste que conmocionó a la sociedad romana. Pocos meses después de que muriese Julio Cesar (15 de marzo del año 44 a.C.) apareció en el firmamento un cometa visible a simple vista, con el consiguiente estupor para todos los que le observaron. La muerte del emperador era tan reciente que el cometa se asoció de inmediato al difunto, una asociación que aún permanece puesto que suele ser conocido con el nombre de cometa de Julio Cesar¹⁹⁵, aunque su denominación científica sea C/-43 K1. El impacto causado por su visión a plena luz del día quedó muy bien reflejado en los cronistas de la época, pudiendo considerarse paradigmático el que hizo Plinio el viejo en su Historia Natural¹⁹⁶. Tras intentar clasificar a los cometas dependiendo del lugar que ocupaban sobre los signos y otras constelaciones¹⁹⁷, se refirió expresamente a la relación entre los emperadores Augusto y Cesar con el planeta en cuestión:

Adórase un cometa por dios en cierto templo de Roma y no en otra parte del mundo, habiéndole juzgado el Divino Augusto por de muy próspera significación. El cual pareció, comenzando él en las fiestas que hizo a la madre Venus, no mucho después de la muerte de Cesar, padre suyo, en el colegio que él instituyó; porque él mismo lo declaró, diciendo estas palabras: “En este mismo tiempo de mis fiestas fue visto un cometa por espacio de siete días en la región septentrional del cielo, el cual nacía

¹⁹⁵ Suele ser considerado como el más brillante de la historia a la luz del día. Al parecer fue observado también en China entre el 18 de mayo y el 16 de junio. En la antigua Roma se le conoció con varios nombres: *sidus Iulium* y *Caesaris astrum*.

¹⁹⁶ Libro segundo, capítulo XXV. De los cometas y prodigios celestes, de su naturaleza, sitio y diferencias.

¹⁹⁷ *Créese importar mucho a que partes se arroje o de que estrella tome sus fuerzas, que semejanzas presente y en qué lugares resplandezca. Porque si tiene forma de flauta, significa sobre el arte de la música y en las partes vergonzosas de los signos sobre los lujuriosos y deshonestos y sobre los ingenios y erudición, si acerca de algunos sitios de las estrellas fijas mostrase figura triquetra o cuadrada, con ángulos iguales.*

poco antes que el Sol se pusiese, claro y visible a todas las tierras. Con este indicio creyó el vulgo haber sido recibida el ánima de Cesar entre las deidades de los inmortales dioses, por lo cual se le puso por insignia la cabeza de su simulacro, que luego le consagramos en la plaza”. Estas palabras dijo Augusto públicamente pero tuvo para sí, no sin grave contentamiento, haber nacido aquella estrella a gloria suya y que él nacía en ella. Y si queremos confesar la verdad, no fue este cometa poco provechoso al mundo.

De acuerdo con Ovidio, el templo que Augusto había construido en honor de su padre adoptivo, en el año 42 a.C., fue dedicado al culto del cometa anterior; a espaldas del mismo había una gran estatua de Julio Cesar coronada en su parte delantera por un cometa flamígero. Más adelante fue usado como un poderoso símbolo de propaganda política, testimonio del cual fue el denario acuñado por Augusto entre los años 18 y 19 a.C., el cual tenía grabado en su anverso el busto laureado del emperador (CAESAR AVGVSTVS) y en su reverso el referido cometa a modo de estrella con ocho puntas, junto al texto DIVVS IVLIV.

Como la duración del año que propuso Sosígenes era mayor de lo debido: 365.25 días en lugar de 365.2422, esto es alrededor de 11 minutos, hubo que proceder a su corrección y por tanto a la reforma del calendario. Aunque ya se viniese observando que los equinoccios se iban adelantando con el transcurso del tiempo, parece ser que el primer intento¹⁹⁸ de remediarlo no se produjo hasta que el papa Sixto IV decidió encargar del asunto al prestigioso astrónomo alemán Johann Müller Könisberg, más conocido con el nombre latino de Regiomontanus. Sin embargo su repentina muerte en Roma (1476) impidió que culminase el encargo, aunque llegase a publicar el trabajo *Kalendarium and de Reformatione Kalendari* (Nuremberg, 1474). La solución del problema comenzó a vislumbrarse formalmente en el Concilio de Trento, cuando en 1563 se responsabilizó al Papa Pío IV de tan delicada cuestión. En los años siguientes Gregorio XIII contactó, tal como refería Bails, con todos los príncipes cristianos para explicarles las necesidades de la reforma y

¹⁹⁸ No obstante es obligado subrayar que Roger Bacon ya había propuesto la reforma al Papa Clemente IV en el año 1267, prácticamente la misma que la que se produciría 300 años después. En su *Opus Majus* (Parte IV) rectificaba los errores del calendario juliano (al que calificaba de intolerable, horrible y ridículo) y proponía eliminar un día cada 125 años.

rogarles que lo comunicasen a todos los matemáticos¹⁹⁹ “de cuya inteligencia pudiesen prometerse o pensamientos nuevos o expedientes acomodados”. Una vez recibidas diversas propuestas, constituyó en Roma la pertinente Comisión del Calendario, siendo generalmente presidida por el cardenal G. Sirleto, “para llevar a su conclusión esta importante obra. Este Calendario Gregoriano que se ha hecho ya el Calendario Civil en todos los países de Europa, consiste en un modo de contar los años, tal que las estaciones siempre caen en unos mismos tiempos del año”.



La Comisión para la reforma del Calendario, dirigiéndose al Papa Gregorio XIII. Obsérvese el puntero señalando el curso del Sol por el zodiaco. Tavolette di Biccherna número 72. Siena (Archivio di Stato). Se ha superpuesto un grabado del mismo Papa sosteniendo un globo terráqueo en el año de su coronación (1572), junto a una alegoría de la prudencia (Grabado de D. Tibaldi).

Como punto de partida de la Comisión prevaleció la decisión del Concilio de Nicea (325), que relacionaba el equinoccio de primavera con la Fiesta de la Resurrección: pues aquel tenía que ocurrir el día 21 de marzo y la fiesta debería celebrarse “el domingo después de la XIV de la Luna del primer mes, esto es, de la Luna cuyo 14 cae o al día mismo, o después del día del

¹⁹⁹ Entre ellos estaban los españoles Juan Ginés de Sepúlveda y Juan Salom, aunque es mucho más destacable la señalada participación del matemático toledano Pedro Chacón, que llegó a presidir la Comisión de la Reforma, aunque falleciese el año antes de que se culminara la reforma. La obra de Angel Fernández Collado (UCLM): *Juanelo Turriano y la aportación española a la reforma del calendario gregoriano*, aporta numerosas pruebas documentales que dan cuenta de la participación de la corona y de diferentes universidades. Felipe II le encargó a Juanelo que hiciese una propuesta de modificación del calendario juliano, propuesta que no fue aceptada. La misma fue incluida en su obra: *Breve Discurso a su Majestad el Rey Católico en torno a la reducción del ano y reforma del calendario, con la explicación de los instrumentos inventados para enseñar su uso en la practica*.

equinoccio”. Bails analizaba muy bien el problema que se estaba intentando resolver:

“En tiempo del Concilio Niceno se creía que el año era con corta diferencia de 365^d 5^h 55^m, conforme a la opinión de Tolomeo; se supuso, pues, que el equinoccio que caía entonces a 21 de marzo siempre caería al mismo día, o que si no fuese así, con el tiempo se remediaría. Pero como la verdadera duración del año solar tiene seis minutos menos, el equinoccio caía cada año seis minutos antes de lo que se pensaba, y en tiempo de Gregorio XIII por el año de 1577, cayó a 11 de marzo; para que el día 21 de marzo se hallase constantemente inmediato al verdadero equinoccio, hubiera sido preciso desechar tres días del año cada 400 años”.

El dictamen papal se formalizó el 24 de febrero del año 1581, con su *INTER gravissimas*, las dos primeras palabras de la bula pontificia, que se reproduce en el anexo correspondiente, GREGORIUS EPISCOPUS SERVUS SERVORUM DEI AD PERPETUAM REI MEMORIAM, con la que se daba por concluido el calendario juliano. Los puntos en los que se concretaban los aspectos más prácticos de la reforma fueron los números VII, VIII, IX y X, parcialmente reproducidos en el trabajo de Benito Bails. Primeramente recordaba que el día 4 de octubre del año 1582 hubo que quitarle diez días a dicho mes, “de modo que el día después de S. Francisco que cae a 4 de octubre, se llame no el 5, sino el 15 de octubre, y la letra dominical G se mude en C”. Seguidamente se regulaba la ocurrencia de los años bisiestos para que el equinoccio coincidiese con el 21 de marzo “manda el Breve que los años bisiestos que ocurrían de cuatro en cuatro, no se verifiquen en los años de 1700, 1800, 1900, sino en el año 2000, y perpetuamente a este tenor, de modo que haya siempre tres años seculares comunes, y el cuarto sea bisiesto por el orden que sigue:

1600, bis.	2100, com.	2600, com.	3100, com.
1700, com.	2200, com.	2700, com.	3200, bis.
1800, com.	2300, com.	2800, bis.	3300, com.
1900, com.	2400, bis.	2900, com.	3400, com.
2000, bis.	2500, com.	3000, com.	3500, com.

Cuadro con los años bisiestos reproducido en la obra de Benito Bails

Para asegurar también el catorce de la Luna Pascual “y los días de la Luna en todo el discurso del año, se omite en el Calendario el Número de Oro, y en su lugar se sustituye el Ciclo de las Epactas, por cuyo medio la Luna nueva siempre guardará su verdadero lugar en el Calendario”. Siendo consciente de la dificultad que supondría su implantación en todo el orbe, recurrió el Papa no solo a los eclesiásticos sino que también se lo rogó muy encarecidamente al emperador y demás gobernantes, en los términos que se recogen en el punto XV de su bula:

Pro data autem nobis a Domino auctoritate hortamur et rogamus carissimum in Christo filium nostrum Rodolphum Romanorum regem illustrem in imperatorem electum, ceterosque reges, principes ac republicas, iisdemque mandamus ut quo studio illi a nobis contenderunt, ut hoc tam præclarum opus perficeremus, eodem, immo etiam maiore, ad conservandam in celebrandis festivitibus inter christianas nationes concordiam, nostrum hoc calendarium et ipsi suscipiant, et a cunctis sibi subiectis populis religiose suscipiendum inviolateque observandum curent.



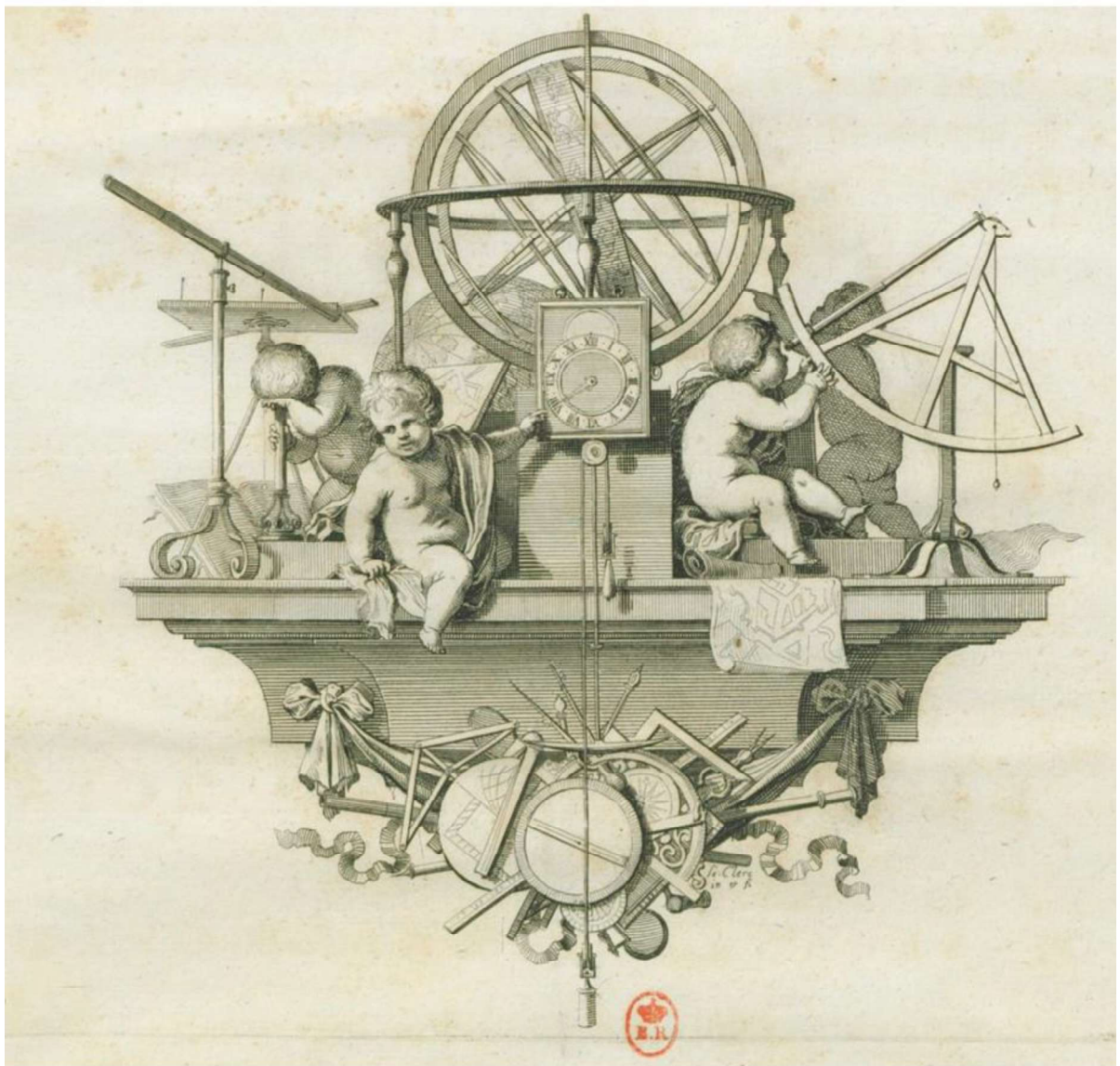
Medalla conmemorativa del calendario gregoriano, acuñada en el año 1582.

Aunque Bails no lo mencionase, es bueno reseñar que, en recuerdo de tan magno acontecimiento, el Papa mandó acuñar una medalla, en cuyo anverso se representó su busto con los ornamentos pontificales, y rodeado de la inscripción: GREGORIUS XIII.PONT.OPT.MAXIMUS. En el reverso figuraba una cabeza de cordero con las cuatro estrellas que forman el signo Aries. Bajo ella pende un festón de flores, cuyos extremos pasan entre las orejas y los cuernos del animal, recogién dose en la parte superior

con un nudo justo encima de la estrella que marca la mitad de la frente. El texto correspondiente, que orla la cabeza del cordero fue: ANNO RESTITUTO M. D. LXXXII, todo ello rodeado por un dragón que se muerde la cola²⁰⁰.

²⁰⁰ Para comprender en su conjunto esa representación es preciso tener presente que en la simbología sagrada de los antiguos egipcios se suponía que la imagen del año y de la eternidad era una serpiente circular que se mordía la cola. Por otra parte es difícil concebir mejor alegoría de la primavera que un festón de flores, sirviendo el nudo que está por encima de la estrella frontal para dar a entender que el equinoccio de primavera queda fijado al comienzo del signo Aries, fijado precisamente por esa estrella, que es la primera del mismo signo del zodiaco. Con tales antecedentes parece más comprensible el significado alegórico de la imagen: el estado perpetuo del año cristiano, con el restablecimiento del equinoccio de primavera en el lugar fijo e inmutable del primero de Aries, es decir en el día 21 de marzo señalado en el Concilio de Nicea. La sustitución del dragón por la serpiente parecía obligada en tanto que en el escudo de la Casa de Ugo Buoncompagni (nombre seglar del Papa) ocupaba el dragón un lugar destacado, solo faltaba añadirle la cola, y que se la mordiera, para completar la analogía egipcia.

3. GEODESIA Y METROLOGÍA



Benito Bails incluyó en su tomo octavo de los Elementos de Matemática un capítulo especialmente interesante, dedicado al estudio de la forma y dimensiones de la Tierra, aunque lo titulase, siguiendo la costumbre de la época, Elementos de Geografía²⁰¹. Su importancia estriba en que se resume, por primera vez en español, el comienzo de la geodesia moderna introducida por el abate francés Jean Picard; cuyas directrices serían básicas para el diseño, y construcción posterior, de las redes trigonométricas del mundo, que servirían de apoyo a la formación de las diversas series cartográficas que representarían el territorio. Bails explicó además los pormenores de los procedimientos astronómicos, geométricos y físicos empleados en cada caso, con los que se obtendría finalmente el desarrollo del grado terrestre, permitiendo así obtener el perímetro o el radio de la Tierra²⁰². La trascendencia de este capítulo se deja sentir también en el campo de la Metrología, complemento indispensable de la geodesia, puesto que proporciona valiosa información sobre una corriente poco divulgada que pretendió establecer como patrón universal de las medidas lineales la longitud del péndulo que batía segundos. En uno y otro caso se constata que Bails contó con información fidedigna proporcionada por los propios protagonistas, lo que viene a corroborar su excelente nivel académico y su buena relación con los círculos científicos franceses de la Ilustración²⁰³.

Bails recordó al comienzo de su disertación el método tradicional que habían seguido los astrónomos antiguos desde que dieron por sentada la esfericidad de la Tierra, medir la amplitud angular de un arco de círculo máximo y su desarrollo lineal. La primera se lograba mediante procedimientos astronómicos, en tanto que se trataba de la diferencia de latitudes de los dos extremos del arco. La medida lineal resultaba más problemática, puesto que se tenía que evaluar sobre el propio terreno la distancia abarcada por los dos radios que definían el arco. Adoptado el modelo esférico, los sacerdotes egipcios sabían que los círculos terrestres eran en todo semejantes a los de la esfera celeste, por lo que también los

²⁰¹ Él mismo lo aclaraba cuando añadía: “aunque la voz Geografía significa lo mismo descripción de la Tierra, no es esta descripción asunto de este trabajo; nuestro ánimo es dar a conocer la figura y magnitud del globo que habitamos”.

²⁰² En el supuesto de considerar el modelo esférico de la misma.

²⁰³ No obstante, es obligado reseñar que ya había tratado del asunto en el Tomo III, aunque de manera menos rigurosa, como él mismo reconocía “en los más de los tratados que componen este Tomo hemos omitido las demostraciones inmediatas con la mira de publicar mayor número de operaciones prácticas, que son lo que más apetece los Discípulos de la Academia”.

suponían divididos en 360°. La consecuencia era obvia, si se conseguía medir uno de sus grados, la medida de la circunferencia sería el producto de ese desarrollo por 360.

El método a seguir, y también apuntado por Bails, no podía ser más simple: observada una estrella en un cierto lugar, se tendría que avanzar o retroceder sobre el meridiano hasta que se obtuviera un incremento de un grado en su altura sobre el horizonte. Seguidamente se necesitaría medir la distancia entre los dos puntos en que se realizaron las observaciones, así lo reflejaba Bails: “basta saber cuántas leguas, toesas o varas”, separaban a los dos puntos en cuestión. La mayor incertidumbre del procedimiento radicaba justamente en la dificultad para medir con rigor esa distancia, de ahí la proliferación de valores de la circunferencia terrestre que fueron apareciendo a lo largo de la historia.

En la segunda mitad del siglo XVII era tal su número que la Academia de Ciencias de París, creada en 1666, consideró como uno de sus principales objetivos la determinación del perímetro de la Tierra con la mayor exactitud posible. La institución le encomendó la tarea a Jean Picard, uno de los miembros fundadores, que como bien señaló Bails fue el primero en averiguar la magnitud de la Tierra con cierta verosimilitud. La medida la efectuó en el año 1669, “para saber cuántas toesas había en línea recta entre Paris y Amiens, cuyas ciudades distan un grado una de la otra, y de cuantos minutos y segundos de la circunferencia del meridiano terrestre era la diferencia de latitud. Abraza, pues, esta medición dos operaciones principales, es a saber, la medida en toesas, y la medición astronómica en grados”.

Siendo conocedor Picard de la imposibilidad material de obtener directamente la distancia con patrones lineales pequeños, recurrió a la triangulación que con tanto éxito había aplicado Snellius en los Países Bajos, cincuenta años atrás. Para ello tuvo que medir una base al Sur de Paris, como bien detallaba Bails: “Picard prefirió acudir a la Trigonometría, contentándose con medir escrupulosamente un trecho de 5663 toesas, del camino de Villejuif a Juvisy, que estaba empedrado en línea recta, infiriendo después todo lo demás de la resolución de varios triángulos²⁰⁴”.

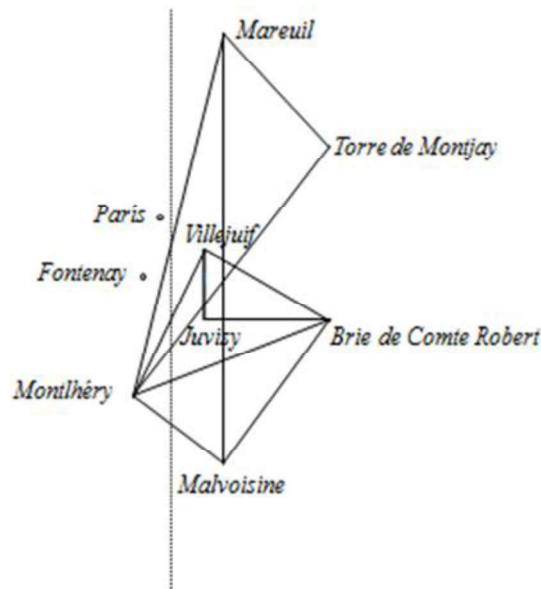
²⁰⁴ Picard anunció que en ambos lugares se habían levantado dos pirámides conmemorativas “que están a 5717 toesas cabales una de otra, conforme aseguran los Académicos que en 1756 han medido su distancia”.



Las dos pirámides geodésicas que conmemoran la medición de la base de Villejuif – Juvisy. La de Villejuif fue el extremo septentrional y la de Juvisy el meridional.

Finalizada la medición de la base comenzó la observación de la triangulación en los vértices de los primeros triángulos, detallando Bails las medidas angulares correspondientes. El primer triángulo fue el formado por los dos extremos de la base y otro vértice localizado en la torre del campanario de Brie-Comte-Robert, el segundo lo formaron los vértices de Villejuif, Brie y el ubicado en la torre de Montlhéry. Los triángulos tercero y cuarto se formaron apoyándose en el lado que unió esos dos últimos vértices, siendo la torre de Malvoisine el vértice más meridional y la de Montjay el vértice del triángulo que continuaba hacia el Norte. El quinto triángulo usó como nuevo vértice el alto de Mareuil (hoy Mareil). Bails apoyó su descripción en un gráfico semejante al que aquí se acompaña.

ANGULOS MEDIDOS EN LA BASE POR JEANPICARD		
Extremo	Vértice	Ángulo
Juvisy	Villejuif Brie	95° 6' 55''
Villejuif	Juvisy Brie	54° 4' 35''
	Brie Montlhéry	77° 25' 50''

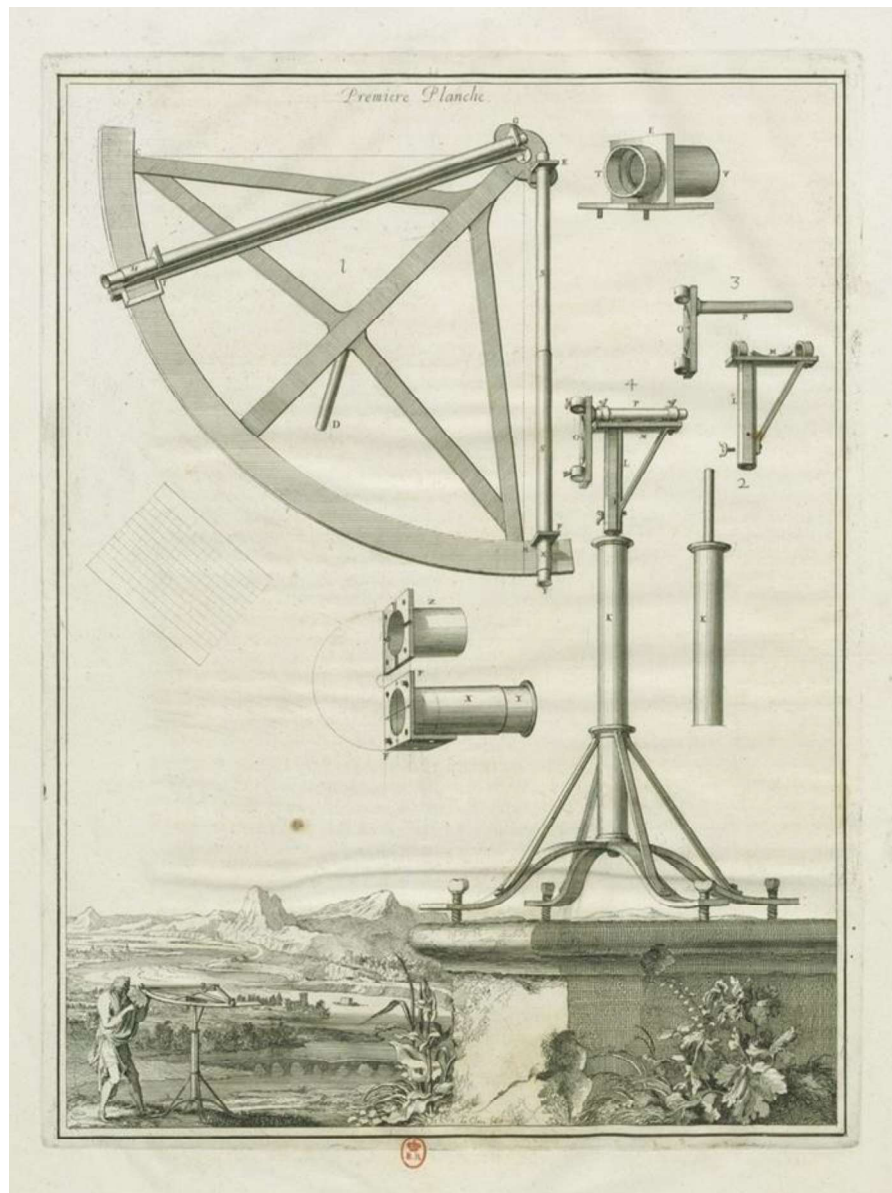


La base medida por Picard y los triángulos de su entorno. El gráfico lo incluyó Benito Bails para ilustrar el texto de su libro.

El instrumento empleado para medir los ángulos fue un cuadrante de círculo, con tres pies de radio, provisto de dos anteojos: uno fijo y otro móvil; cuyo plano se colocaba horizontalmente para las observaciones terrestres y verticalmente para las astronómicas²⁰⁵. Además de esas medidas angulares, Picard orientó la triangulación al determinar los acimutes de varios de sus lados a través de observaciones al Sol; así lo refería Bails: “...observó también la dirección de estos triángulos o el ángulo que formaba el primer lado con la meridiana, por medio de las amplitudes del Sol”. Conocidos los valores angulares pudo Picard calcular los lados de los triángulos correspondientes, a partir de la base citada. Bails ofreció los valores lineales obtenidos:

LADOS DE LOS PRIMEROS TRIÁNGULOS USADOS POR JEAN PICARD	
Villejuif-Brie	11012 toesas y 5 pies
Brie-Montlhéry	13121.5 t
Montlhéry-Malvoisine	8870.5 t
Montlhéry-Montjay	21658 t
Malvoisine- Mareuil	31897 t

²⁰⁵ Con él se midieron las distancias cenitales de numerosas estrellas que intervinieron en el cálculo de la latitud del lugar.



Detalle del sector circular usado por Jean Picard en las medidas angulares.

Más adelante recordaba en su relato las dificultades que se tuvieron que vencer al identificar las señales visadas a gran distancia:

“Picard se vio muchas veces en la precisión de mandar encender fuego en Mareuil, Montlherý y Malvoisine, para que sirviera de señal; un fuego de 3 pies²⁰⁶ de ancho hecho en Mareuil, y visto desde Malvoisine, parecía a la vista sola como una estrella de tercera magnitud; no se le veía efectivamente sino en un ángulo de $3'' \frac{1}{4}$, sin embargo mirado con el anteojo parece tenía $8''$ de diámetro. Esto es una prueba de que los cuerpos luminosos parecen algo mayores de lo que son en la realidad, y que los

²⁰⁶ Recuérdese que una toesa (≈ 1.949 m) tenía 6 pies, el pie 12 pulgadas, la pulgada 12 líneas y la línea 12 puntos.

fuegos son muy del caso para servir de señales en las operaciones geométricas a distancias muy grandes”.

Como señalaba Bails, Picard extendió la triangulación, con otros ocho triángulos, hasta enlazarla con el campanario de la catedral de Amiens. Sus cálculos le permitieron fijar la distancia entre el vértice de Amiens y el de Malvoisine, 78850 toesas, de manera que como la diferencia de latitudes entre ellos fue de $1^{\circ} 22' 55''$, resultó para el grado un desarrollo de 57057 toesas²⁰⁷, luego redondeado por él a 57060 toesas. No obstante, Bails matizó de inmediato ese resultado: “esta medición se volvió a ejecutar en este siglo con más precauciones y mejores instrumentos, y solo se hallaron 17.5 toesas menos”.

Aunque no se conserven los cuadernos de campo empleados por Picard, si se presentaron sus resultados en la obra *Mesure de la Terre* (1671), publicada en París bajo el patrocinio del Imprenta Real. Es cierto que la cadena triangular extendida a lo largo del arco de meridiano, comprendido entre Amiens y Malvoisine, no cumplía los requisitos considerados indispensables años después y que sus determinaciones astronómicas fueron un tanto defectuosas, pero también lo es que el valor que proporcionó el astrónomo francés para el desarrollo del grado fue tan importante como novedoso. Frecuentemente se afirma, sin prueba documental que lo certifique, que el valor del radio terrestre deducido a partir de él le sirvió a Newton para confirmar la validez de su hipótesis universal. Puede pues asegurarse que esta obra de Picard tan trascendente para la historia de la geodesia, quizás jugase también un papel decisivo para el desarrollo científico al haber servido de detonante para que Newton se decidiera a divulgar sus memorables *Principia*.

El éxito alcanzado por Maupertuis en la expedición científica a Laponia, le permitió comprobar la medición que había realizado Picard en el siglo anterior. A raíz de ello se constató que la amplitud angular del arco era errónea y por tanto el desarrollo del grado obtenido en su momento, como quedó establecido al fijar él, junto a su colaborador Le Monnier, el nuevo valor en 57183 toesas. El resultado de la nueva medida, lo expresaba así Bails: “por manera que todas las distancias que Picard determinó venían a tener una toesa más en cada mil, sea porque la toesa que sirvió en la

²⁰⁷ El perímetro del meridiano terrestre se obtendría multiplicando ese valor por 360, resultando 20540520 toesas, es decir unos 40033.5 km de perímetro y un radio próximo a los 6371.5 km.

comprobación fuese algo mayor que la suya, sea porque no hubiese medido Picard con toda la exactitud que cabe la base de Villejuif a Juvisy que es el fundamento de todas las demás distancias”. En el año 1740, Cassini de Thury y La Caille volvieron a medir dicha base en cinco ocasiones²⁰⁸, al igual que se haría dieciséis años después en dos ocasiones, “por ocho individuos de la Real Academia de Ciencias”, tal como informaba Bails. Extendida la comprobación a toda la triangulación, se pudo constatar, también de acuerdo con Bails, que el arco del meridiano terrestre definido por la fachada Sur del Observatorio de París y la aguja de la Catedral de Amiens fue 60390 toesas.



Portada del discurso pronunciado por Maupertuis en la Academia de Ciencias de París (13 de noviembre de 1737), dando cuenta de sus observaciones en el círculo polar. Se presenta también una imagen del mismo aplastando la Tierra, expuesto en un Museo de Saint Malo, su ciudad natal.

La magnitud de la amplitud angular del arco anterior fue igualmente revisada, comprobando que la diferencia entre las distancias cenitales de estrellas, observadas desde París y Amiens, ascendía a $1^{\circ} 1' 13''$. Siendo el desarrollo lineal correspondiente de 58233 toesas, se trataba de hallar el valor correspondiente a una diferencia de tan solo un grado. Efectuada la

²⁰⁸ Cuya longitud ya se había fijado en 5717 toesas al medirla con el patrón utilizado en la operación de Laponia.

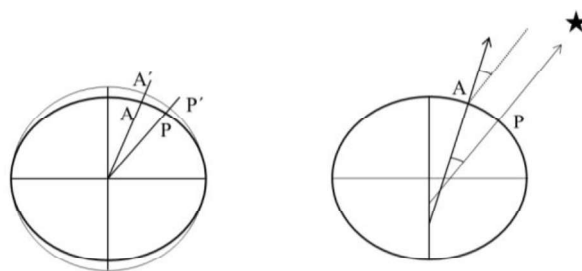
proporción, declaraba Bails que el desarrollo del arco resultante fue de 57074 toesas, “y son las que coge el arco terrestre desde París a Amiens, esto es a la latitud de $49^{\circ} 23'$, medido con la toesa que sirvió en Laponia, y en el tiempo que el termómetro de Réaumur señala 10 o 12 grados. Este grado se reducirá a 57072 toesas si sirviera la medida de la base sacada en 1756, y aún a 57069 ejecutándola con la toesa del ecuador, de la cual hablaremos más adelante”. Acto seguido quiso Bails fijar el tamaño del globo terráqueo²⁰⁹, cifrándolo en 9000 leguas al multiplicar 360 por las 25 veces en que estaban contenidas en el grado. También obtuvo un diámetro de 2865 leguas, “por la razón de la circunferencia al diámetro²¹⁰”. Las equivalencias métricas de tales cantidades son obvias: el desarrollo del grado sería de 111.227 km, la legua francesa tendría 4.45 km, el perímetro terrestre sería de 40041.9 km y el diámetro tendría alrededor de 12745.7 km.

Bails creyó que los lectores de este capítulo de su obra ya estaban al tanto de que el nuevo modelo matemático de la Tierra era el elipsoide de revolución²¹¹, pues hizo el comentario siguiente: “el grado medido entre París y Amiens hubiese bastado para determinar la magnitud de la Tierra en el supuesto de que sea esférica, pero si la Tierra no es redonda, los 360° han de ser diferentes unos de otros, y el grado de las inmediaciones de París no será la 360^{a} parte de la circunferencia de la Tierra”. Para explicarlo con más claridad recurrió a la geometría del elipsoide, aclarando que el ángulo formado por dos radios cualesquiera de una circunferencia circunscrita a la elipse meridiana no delimitaría sobre esta un arco con igual desarrollo, esto es que el arco A'P' sería diferente del A P.

²⁰⁹ Aunque ya hubiese comentado antes que la legua media de Francia, de 2283 toesas, equivalía a la 25^{a} parte del grado.

²¹⁰ Realmente se trataba de dividir el perímetro de la circunferencia meridiana (9000 leguas) por el número pi.

²¹¹ Resulta un tanto paradójico que tras medir con cierta exactitud el radio de la Tierra y servir el valor obtenido para comprobar la ley de la gravitación universal, se iniciara el declive irremediable del modelo esférico de la Tierra transmitido desde la más remota antigüedad. Coincidiendo con la verificación anterior, Newton y Huygens formularon la hipótesis de que si la Tierra giraba en torno a su eje, y no era un sólido rígido, forzosamente adoptaría la forma de un elipsoide con aplastamiento polar. Sin pretender restar importancia a las aportaciones teóricas de estos dos sabios, si es obligado recordar que cuando las hicieron sabían que el astrónomo francés Jean Richer había probado en la isla francesa de Cayena (1671), en las proximidades del ecuador, que la gravedad en aquellas latitudes era menor que en la metrópoli; en otras palabras que la distancia de la colonia al centro de la Tierra era mayor que la de la metrópoli. Los trabajos de Richer fueron amparados por la Academia de Ciencias de París, publicándose sus resultados en la obra *Observations Astronomiques et Phisiques faites en l'isle de Caienne* (1679).



Verticales en la elipse meridiana y en una circunferencia circunscrita a la misma. Ilustración empleada por Benito Bails en sus Elementos de Geografía.

Por otra parte, al tratarse el elipsoide de una superficie de curvatura variable, resulta que las normales a la misma son en general rectas que se cruzan, salvo que los puntos considerados perteneciesen a un mismo paralelo o meridiano. Bails ponía el ejemplo de París y Amiens, considerando que sobre el cenit de la primera se encontrase la estrella Mirfak²¹² de Perseo, mientras que en la segunda presentaría una cierta distancia cenital. Ese ángulo coincidiría, como se aprecia en la figura adjunta, con el que formarían las verticales de ambas ciudades, una circunstancia que resumió Bails con estas palabras: “síguese de aquí que los grados que medimos por observación, son ángulos que no tienen su vértice en el centro de la Tierra, si en el punto de concurso de las verticales perpendiculares a la Tierra en A y P”. De esa propiedad geométrica coligió que “el grado del esferoide terrestre, sea la que fuere su figura²¹³, es el espacio que es preciso andar en la Tierra para que la línea vertical varíe un grado”.

Bails asoció inmediatamente el desarrollo del arco a la curvatura de la Tierra, es decir a la inversa de su radio, de manera que “en los parajes más aplanados de la Tierra los grados han de ser más largos...en una elipse y todas las curvas que se le parecen, la curvatura mayor está en el extremo del eje mayor, y la menor en el extremo del eje menor; luego si la Tierra es aplanada hacia los polos, el arco de un grado cogerá más toesas si se le midiese más cerca de los polos donde el aplanamiento es máximo”. Aunque Bails no refiriera expresamente la controversia científica, que presidió el siglo XVIII, entre los partidarios del elipsoide con aplastamiento polar y los de otro con achatamiento ecuatorial, si comentó, con cierto

²¹² Esta estrella (α Persei) es la más brillante de la constelación y se encuentra a unos 590 años luz..

detalle, que fue la Academia de Ciencias de París la institución que propició la resolución de la misma, al patrocinar la medida de sendos arcos de meridiano en latitudes tan dispares como el Virreinato del Perú y Laponia. La expedición americana fue propuesta por el astrónomo Louis Godin, luego director del Observatorio de Cádiz, y la más septentrional por el matemático y astrónomo Pierre Louis de Maupertuis.



Pierre-Louis Moreau de Maupertuis y el gráfico de la triangulación que usó para medir un arco del meridiano de Kittis. Obsérvese que Maupertuis apoya su mano derecha sobre el globo terráqueo, una imagen que simbolizó el aplastamiento polar y confirmó las tesis newtonianas.

La primera expedición comenzó sus trabajos antes de que Maupertuis partiera para el territorio sueco. Sin embargo las numerosas dificultades que hubieron de superar²¹⁴ hicieron que fuera aquel el primero en demostrar, mediante la observación, la validez de las tesis newtonianas. Así lo resumió Bails:

“...hallaron los Académicos enviados al Norte que la distancia de los dos observatorios puestos en Torneo y Kittis, reducida al meridiano, era de 55023 $\frac{1}{2}$ toesas. Después hallaron por las distancias α y δ del dragón al cenit de cada lugar, que la amplitud del arco del meridiano comprendido entre los paralelos de los dos observatorios era de 57'28'' $\frac{2}{3}$; de donde

²¹⁴ Aparte de que la amplitud del arco americano fue triple que la del laponés.

resulta que la longitud del grado de meridiano que corta el círculo polar es de 57438 toesas, del cual se han de rebajar 16 toesas por razón de la refracción que Maupertuis no llevó en cuenta, será, pues, el grado de 57422 toesas, 350 toesas mayor que el grado de París. Este aumento del grado entre 49° y 66° de latitud, demostró el aplanamiento hacia los polos”.

Las referencias de Bails a las medidas efectuadas en la colonia española fueron incompletas y un tanto sorprendentes, puesto que solamente se mencionó la contribución de La Condamine²¹⁵ y olvidó el papel determinante jugado por los dos marinos españoles: Jorge Juan y Antonio de Ulloa, para que tan importante empresa llegase a buen término. Aunque las desavenencias entre los expedicionarios fuesen dificultades añadidas a superar, al final permitieron contar con más datos a la hora de fijar el verdadero valor del desarrollo del grado en aquellos territorios. Este fue el resumen efectuado por nuestro protagonista:

“los Académicos enviados al ecuador midieron un arco de 176950 toesas, cuya amplitud hallaron de 3° 7'1'' entre los dos observatorios de Cochasquí y Tarqui; por consiguiente la longitud del grado era de 56775 toesas. Pero reduciéndole al nivel del mar, Condamine infirió, después de examinadas todas las observaciones de sus compañeros, que el primer grado del meridiano es de 56753 toesas. Este primer grado del meridiano, suponiéndole de 56753 toesas tiene 321 toesas menos que el de Amiens a París, 57074, y 669 toesas menos que el grado medido debajo del círculo polar 57422”.

Para continuar con sus explicaciones geodésicas, tuvo que recurrir Bails al estudio de la geometría del elipsoide de revolución, más compleja que la de la esfera por tratarse de una superficie de curvatura variable. El elipsoide terrestre puede considerarse engendrado por cualquiera de las elipses meridianas al girar sobre su eje menor. Supuesto un punto arbitrario del elipsoide es obvio que al efectuar ese giro describiría una circunferencia, su paralelo, de manera que podría identificarse por su intersección con el meridiano ya citado. Ambas curvas, el meridiano y el paralelo, permiten definir las coordenadas curvilíneas que localizarían el punto en cuestión. Efectivamente, el paralelo se puede considerar como el lugar geométrico de los puntos con igual latitud, de manera que el ecuador sería el paralelo de

²¹⁵Cuando no tenía ni siquiera la condición de astrónomo.

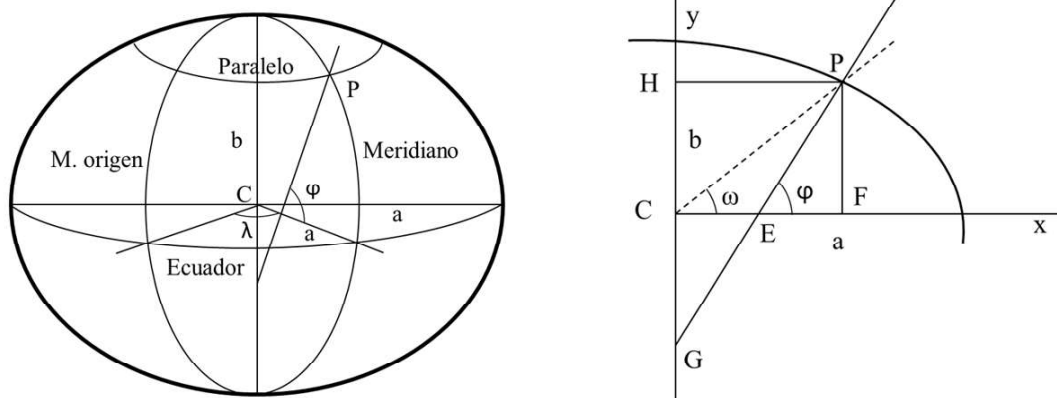
latitud cero. En cuanto a la longitud, está asociada al meridiano, una línea que es lugar geométrico de los puntos con idéntica coordenada. La latitud de un punto sería también el ángulo formado por la normal, en él, a la superficie del elipsoide y el plano del ecuador. La longitud se acostumbra a definir en términos relativos, como el ángulo formado por el meridiano del punto considerado y otro que se toma como origen; aunque podría tomarse ese ángulo como la propia longitud del punto, entendiendo que se está refiriendo al meridiano origen.

Bails concretó las fórmulas con las que hallar las dimensiones de diferentes segmentos y ángulos, que podrían intervenir en los cálculos a efectuar sobre la elipse meridiana. La nomenclatura que empleó fue la propia de su tiempo, la cual es de lectura complicada, de ahí que se haya preferido sustituirla por otra más acorde a la que se emplea en la actualidad y que resulta mucho más comprensible. Supuestos dos ejes cartesianos situados en el plano del meridiano y con origen en el centro del elipsoide: el de abscisas en el plano del ecuador y el de ordenadas sobre el eje de revolución, la ecuación de la elipse meridiana es: $(x^2 / a^2) + (y^2 / b^2) = 1$, siendo a y b los semiejes mayor y menor de la elipse. Uno de los parámetros más característicos de la misma es su excentricidad, dada por $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$. Otra relación notable entre esos semiejes es la siguiente: $\alpha = (a-b) / a$, llamada aplastamiento o achatamiento. El elipsoide puede describirse por dos de los parámetros anteriores²¹⁶, por ejemplo el semieje mayor y ese aplastamiento, se demuestra que $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$.

La curvatura variable del elipsoide se traduce en que cada una de las curvas que podrían trazarse sobre un punto genérico de la superficie del mismo, el P de la figura adjunta, tendría diferente radio de curvatura. No obstante en esa colección de radios habría dos que alcanzan valores extremos: máximo y mínimo. Estos dos radios son básicos en la evaluación del tamaño del elipsoide y en particular en el del desarrollo de sus meridianos y paralelos: se demuestra en geometría diferencial que el valor máximo responde a la expresión $v = a (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, mientras que el mínimo lo haría a esta otra $\rho = a (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$. El significado geométrico de ambos es el siguiente: v coincide con el segmento PG y es el radio de curvatura del

²¹⁶ Para tener una idea más cabal del tamaño y forma del elipsoide terrestre, se indican dos valores muy aproximados: $a \approx 6378$ km y $\alpha \approx 1/300$. A partir de ellos se podrían obtener los demás, resultando $b \approx 6357$ km y $e^2 \approx 1/150 \approx 0.0067$. Quiere decir que la diferencia entre los dos ejes del elipsoide es del orden de los 42 km.

primer vertical²¹⁷, ρ es el radio de curvatura del meridiano en el punto P, pudiéndose comprobar que su centro de curvatura está por debajo del ecuador, justamente entre los puntos E y G. La propia figura muestra que el radio del paralelo sería precisamente el producto $v \cos \varphi = CF = PH$. Es pues obvia la importancia de la latitud geodésica en la descripción del elipsoide.



Elipsoide de revolución con aplastamiento polar y un detalle de su elipse meridiana: elementos geométricos.

Naturalmente que esos valores extremos de los radios de curvatura se simplificarán en puntos tan singulares como los polos, cuya latitud es de 90° , o en todos los del ecuador, en donde se anula dicha coordenada. A partir de las fórmulas anteriores se demostraría que en los polos coinciden los dos radios, adoptando el valor $a(1 - e^2)^{-1/2}$; en cambio en el ecuador sus valores serían respectivamente: $v = a$ y $\rho = a(1 - e^2)$. Obsérvese que el radio del meridiano en los puntos cercanos a los polos será mayor que el correspondiente a puntos cercanos al ecuador. Otros segmentos que convendría calcular al estudiar la elipse meridiana, y que obtuvo Bails, son los PF y CP que marcan las distancias del punto P al plano del ecuador y al centro de la misma. Teniendo en cuenta la ecuación de la elipse, como el primer segmento sería la ordenada y la abscisa es el radio del paralelo $v \cos \varphi$, se obtendría sin mayor dificultad que $PF = v(1 - e^2) \sin \varphi$. El segundo segmento CP se obtendría también con facilidad, puesto que es la hipotenusa del triángulo CPF, resultando que $CP = v(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$.

²¹⁷ Recuérdese que esta sección normal del elipsoide es perpendicular a la del meridiano, una relación geométrica idéntica a la que existía entre sus homólogas astronómicas.

La excentricidad del meridiano se podría evaluar igualmente a partir de los segmentos canónicos CE y CG, los cuales cuantifican, en cierto modo, la separación entre la normal al elipsoide y el centro del mismo, en las proximidades del ecuador. Evidentemente, el segmento CG sería $GH - CH = GH - PF = v e^2 \sin \varphi$. Por otro lado $\tan \varphi = CG / CE$ y por tanto $CE = v e^2 \cos \varphi$, de manera que EG, hipotenusa del triángulo CEG, valdría $v e^2$. También se podría hallar el argumento del radio vector CP, esto es el ángulo ω , ya que cumpliría la relación $\tan \omega = (1 - e^2) \tan \varphi$; evidentemente el ángulo CPE valdría $\varphi - \omega$. Por procedimientos similares se podrían determinar los restantes elementos que figuran asociados al cuarto de meridiano. En cualquier caso es de la mayor importancia el cálculo de los desarrollos de los arcos de paralelo y de meridiano, pues darían mejor idea de las dimensiones del elipsoide terrestre. En el caso del paralelo no se presenta dificultad alguna, pues bastaría multiplicar la longitud del arco, coincidente con la diferencia de longitudes de los extremos del arco, por el radio del paralelo, es decir que el desarrollo del paralelo D_p sería $\Delta\lambda v \cos \varphi$; téngase en cuenta que se trataría de un arco de circunferencia. Mucho más complicada sería la obtención del desarrollo del meridiano D_m pues habría que recurrir al cálculo integral, ya que la curvatura de la elipse es variable; recuérdese que su radio de curvatura dependía de la latitud; no obstante en los supuestos en que la amplitud del arco sea pequeña se podría aplicar la fórmula $D_m = \Delta\varphi \rho$.

¿Cómo se elegía el modelo elipsoidal más apropiado? Las claves de la respuesta la daba Bails después de haber planteado y resuelto el ejercicio siguiente: *Dados dos grados de una elipse, determinar todas sus dimensiones*²¹⁸. La solución analítica del problema es una mera aplicación del cálculo integral, ya que el desarrollo del arco de meridiano viene dado por la integral definida²¹⁹: $D_m = \int_{\varphi}^{\varphi'} \rho d\varphi$, siendo φ y φ' las latitudes de sus extremos. Se trataría por tanto de plantear esa ecuación dos veces, una para cada arco, a fin de obtener dos de los parámetros del elipsoide: el semieje mayor y el aplanamiento fueron los más frecuentemente elegidos. Si la exactitud requerida así lo permitía podía truncarse el desarrollo de la integral anterior, al despreciar las potencias de la excentricidad con exponente mayor o igual que cuatro. En tales casos la fórmula a emplear

²¹⁸ Bails se estaba refiriendo implícitamente al elipsoide, aunque solo citase la elipse meridiana.

²¹⁹ La solución de esta integral no es inmediata por ser de la familia de las elípticas, quiere decir que se ha de expresar como un desarrollo en serie de potencias.

era relativamente simple: $D_m = a [(1 - e^2) \varphi - (3e^2/8) \text{sen } 2\varphi]$, siendo φ la latitud media del lugar considerado; consiguientemente deberían plantearse en dos ocasiones, una por desarrollo obtenido. Si la segunda fórmula fuese $D'_m = a [(1 - e^2) \varphi' - (3e^2/8) \text{sen } 2\varphi']$, y se restasen ambas expresiones miembro a miembro quedaría:

$D'_m - D_m = a [(1 - e^2/4) (\varphi' - \varphi) - (3e^2/8) (\text{sen } 2\varphi' - \text{sen } 2\varphi)]$, ahora bien como $\varphi' - \varphi = 1^\circ = \pi / 180$, resultaría $M_1 = a [(1 - e^2/4) (\pi / 180) - 3e^2 K_1 / 8]$, siendo $K_1 = \text{sen } 2\varphi' - \text{sen } 2\varphi$; es decir que $a = \frac{M_1}{\frac{\pi}{180} - e^2 \left(\frac{\pi}{720} + \frac{3}{8} K_1 \right)}$. No obstante

se tendría que cumplir idéntica ecuación en los dos lugares en que se realizó la medida del arco, es decir que también se habría de verificar la igualdad siguiente en el segundo:

$a = \frac{M_2}{\frac{\pi}{180} - e^2 \left(\frac{\pi}{720} + \frac{3}{8} K_2 \right)}$, con $M_2 = a [(1 - e^2/4) (\pi / 180) - 3e^2 K_2 / 8]$ y $K_2 = \text{sen } 2\varphi' - \text{sen } 2\varphi$. Igualando las dos expresiones del semieje mayor y despejando el cuadrado de la excentricidad resultaría:

$$e^2 = \frac{\frac{\pi}{180} (M_2 - M_1)}{M_2 \left(\frac{\pi}{720} + \frac{3K_1}{8} \right) - M_1 \left(\frac{\pi}{720} + \frac{3K_2}{8} \right)}.$$

Tanto el numerador como el denominador serían pues conocidos y se podría obtener la excentricidad de la elipse meridiana y por tanto la del elipsoide, sin más que sustituir los valores correspondientes a cada uno de los puntos del arco empleado. Si se pretendiera hallar el aplastamiento, se podría lograr a partir de la igualdad $\alpha = 1 - (1 - e^2)^{1/2}$. En lo que se refiere al eje mayor, es inmediato que se obtendría usando cualquiera de las dos ecuaciones en que figuraba como primer miembro, sustituyendo las latitudes en uno u otro caso.

La dificultad surgió de inmediato cuando se compararon, dos a dos, los numerosos desarrollos obtenidos en diferentes latitudes, pues aunque se mantuvo sensiblemente el tamaño del modelo, a través del semieje mayor, no ocurría lo mismo con el valor del aplastamiento. Fue de ese modo como se llegó a la conclusión de que el meridiano presentaba irregularidades y no era una elipse en sentido estricto. Bails lo hacía ver así: “si en la fórmula hallada²²⁰ sustituimos los grados medidos en Francia y el Perú, se sacará

²²⁰ En realidad, la fórmula y el método empleado por Bails difería de los aquí expuestos.

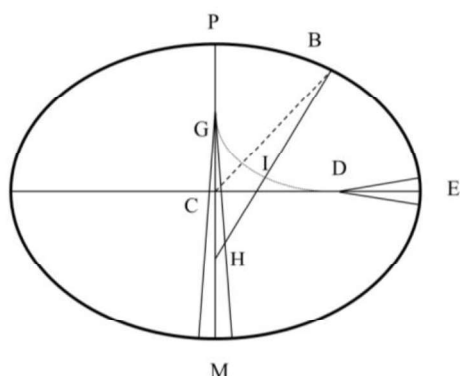
que el aplanamiento de la Tierra es de $1/304$, pero comparando el grado del Norte con el del Perú solo se saca $1/210$. Se indica de estos diferentes resultados que la Tierra no tiene una figura regular y perfectamente elíptica, o que hay en los grados medidos otra razón de desigualdad, porque de otra manera estas dos comparaciones diferentes deberían dar un mismo resultado”.

A continuación, intentó Bails hallar la verdadera forma de la curva del meridiano, fundándose en las diferencias que presentaban entre sí los desarrollos del grado en el ecuador, en Francia y en Laponia, creyendo que tales excesos “deberían ser como los cuadrados de los senos de las latitudes...Aplicando esta hipótesis a todos los demás grados de la Tierra, resulta una curva cuya naturaleza vamos a determinar para poder calcular sus radios y los ángulos de las verticales con los radios”. Para ello tendría que conocer antes el exceso del último grado, esto es el del polo, con relación al primero, el del ecuador, “...el que está debajo del polo es de 57712 toesas, y tiene 959 más que el primer grado”. Una vez sabido este se podía deducir el exceso de un grado cualquiera, el de París por ejemplo, “...con decir la cuarta potencia del radio, que siempre es 1, es a 959, como la cuarta potencia del seno de la latitud de París es al exceso del grado medido hacia París respecto del primer grado. Se reduce esta proporción a multiplicar 959 toesas por la cuarta potencia del seno de la latitud dada para sacar el exceso del grado”. También contempló la posibilidad de obtener la longitud del radio correspondiente a un cierto grado a partir del desarrollo del mismo.

La limitación de todas estas elucubraciones geométricas²²¹ de Bails fueron reconocidas directamente por él cuando aseguraba: “en esta operación suponemos que un grado de la Tierra siempre es un arco de círculo, pero sea la que fuere la figura de la Tierra, discrepa tan poco del círculo, que podemos, sin error sustancial suponer que un arco de grado se confunde con el arco del círculo que tuviese la misma curvatura y el mismo radio que él. El que tuviese algún escrúpulo acerca de esto, podrá valerse de la

²²¹ Las simplificaciones impuestas por Benito Bails se explican por la práctica imposibilidad de resolver, en su tiempo, con las debidas garantías las integrales elípticas ya comentadas e incluso el cálculo de los radios de curvatura del meridiano en cada uno de sus puntos. Por otra parte, tampoco podía dibujarse a escala la elipse del meridiano si se pretendía constatar su aplastamiento polar, pues en tal caso no se diferenciaría de una circunferencia. En efecto, si se dibujase una elipse de semiejes 6378 km y 6357 km a escala $1/10000000$, resultaría otra de 63.78 cm y de 63.57 cm, es decir que se diferenciarían en tan solo 2 mm, cantidad inapreciable; ese hecho obliga, a efectos didácticos, a dibujar el elipsoide con un aplastamiento mayor del debido.

longitud de un minuto, y sacará el mismo resultado”. Para proseguir con sus explicaciones eligió Bails el modelo elipsoidal definido por un grado ecuatorial de 3251707 toesas y por otro polar de 3306654 toesas, lo que equivalía a definirlo²²² por un semieje mayor de 3279065 toesas y una excentricidad cuyo cuadrado valía 0.00834. Con objeto de hallar otros elementos geométricos de la elipse meridiana, PEM en la figura adjunta, partió de la evoluta²²³ DIG; suponiendo que D era el centro de curvatura del arco de meridiano en el ecuador y G el correspondiente al meridiano del polo.



Sección meridional del elipsoide. D y G son los centros de curvatura del meridiano en el ecuador y en el polo. La parte de evoluta GID se refiere al cuadrante de la elipse CEM.

Con tales datos resultaba evidente la diferencia entre los radios extremos del meridiano: 54947 toesas, “equivalente a 57 veces el exceso que el último grado lleva al primero”. Tras haber deducido las expresiones generales de diversos segmentos característicos de la elipse meridiana, las particularizó para la ciudad de París, hallando tanto el radio del primer vertical BH, como el módulo de su radio vector CB. Partiendo de que la latitud de París era de $48^{\circ} 50'$, obtuvo $BH = 3292845$ toesas y $CB = 3271581$ toesas. También determinó el ángulo CBH “que formaba la vertical con el radio correspondiente a París”, fijándolo en $48^{\circ} 30'24''$, es decir $19'36''$ menos que la latitud²²⁴. Bails acompañó estos comentarios sobre los grados del elipsoide con una tabla en la que vació “los diez

²²² Valiéndose de las expresiones del radio de curvatura del meridiano en el polo y en el ecuador, se pueden despejar inmediatamente los valores de a y de e^2 .

²²³ Se define la evoluta de una curva como el lugar geométrico de todos sus centros de curvatura. En el caso de la elipse es un astroide o curva estrellada con cuatro vértices.

²²⁴ Esos mismos valores calculados de acuerdo con la formulación actual, ya indicada con anterioridad, son los siguientes: $BH = 3286765$ toesas, $CB = 3279065$ toesas, $CBH = 48^{\circ} 15'42''$.

grados medidos geométricamente por diferentes astrónomos”, expresando los desarrollos en toesas²²⁵.

Tabla de los diez grados medidos geométricamente por diferentes Astrónomos		
Latitud	Desarrollo	Autores
0° 0'	56753 t	Bouguer y Condamine
33 18	57037	Abate de la Caille
39 12	56888	Mason y Dixon
43 0	56979	Abate Boscovich
44 44	57069	El P. Beccaria
45 0	57028	Aca. De Ciencias
45 57	56881	Abate Liesganig
49 23	57069	París-Amiens
66 20	57422	Laponia
48 43	57086	Abate Liesganig

Asimismo aprovechó la ocasión para calcular la superficie del elipsoide terrestre, “su solidez y su peso”. Los parámetros de que partió fueron los dos diámetros de la Tierra: el mayor de 6562024 toesas, o de 2874.4 leguas, y el menor de 6525376 toesas, equivalentes a 2858.4 leguas. Su volumen, lo fijó en 12366044000 leguas cúbicas, de modo que si la Tierra hubiese sido esférica tendría un radio de 1434.545 leguas y una superficie de 25860563 leguas cuadradas. Bails reconoció inmediatamente después la dificultad que suponía calcular la superficie elipsoidal, al tener que hacerlo mediante un desarrollo en serie; no obstante consiguió llegar al valor de 25858089 leguas cuadradas²²⁶. Su intento de obtener la masa de la Tierra merece ser subrayado, pues casi coincidió en el tiempo con los experimentos que protagonizaron al respecto Maskelyne y Cavendish en el Reino Unido. Para ello supuso que el interior de la Tierra sería análogo “con poca diferencia, a la arcilla, cuyo pie cúbico pesa unas 140 libras”. Como ya había determinado el volumen, y la masa de una toesa cúbica sería 30240 libras, resultarían 3597752 E 8 para la legua cúbica y “el peso de toda la Tierra será de 444899400000000000000000 libras, cuyo número consta de 25 caracteres²²⁷”.

²²⁵ El jesuita Liesganig efectuó la primera medida en Hungría y la segunda en Austria. Mason y Dixon realizaron su medición en América del Norte y el también jesuita Beccaria en las proximidades de Turín.

²²⁶ La fórmula que permite calcular la superficie del elipsoide es $S = 4\pi b^2 [1 + (2e^2/3) + (3e^4/5) + \dots]$, de manera que aplicándola al supuesto planteado por Bails, y despreciando e^4 , resultarían 25758477 leguas cuadradas. El volumen del elipsoide en función de sus dos semiejes es igual al cociente $4\pi a^2 b/3$.

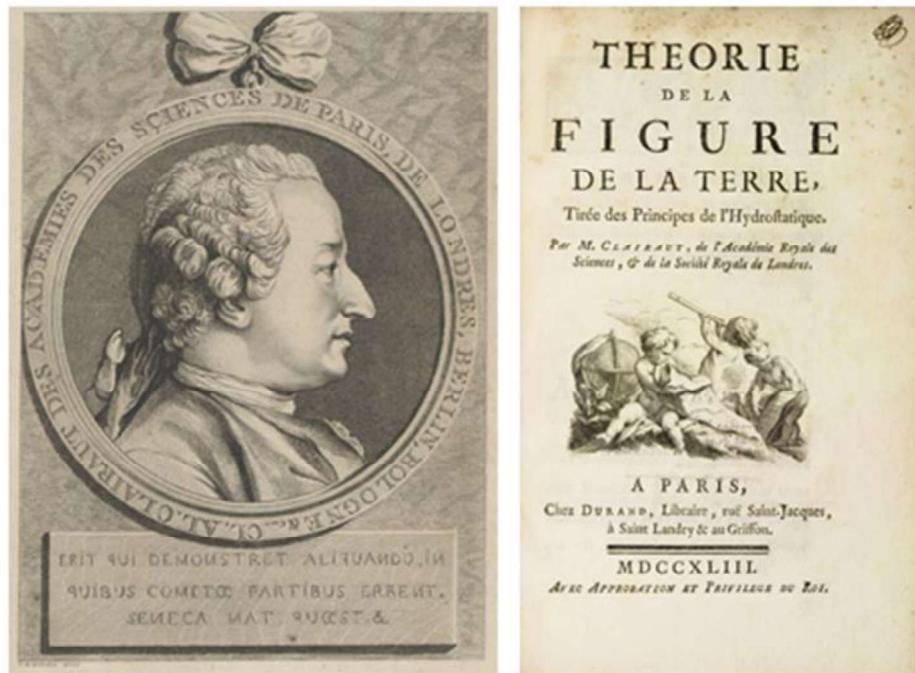
²²⁷ Hoy se admite que la densidad media de la Tierra es del orden de 5.52 g/cm³ y que su masa alcanza los 5.9722 E24 kg.

Bails terminó este apartado manifestando que ocasionalmente también se había determinado el desarrollo de un arco de paralelo. En esos casos se planteaban serias dificultades al determinar la amplitud angular del arco, coincidente con la diferencia de las longitudes entre sus dos extremos, aunque el cálculo del desarrollo fuese obvio al ser un arco de circunferencia. En un principio obtuvo su valor en el supuesto de la esfera, pero finalmente si lo determinó como es debido: multiplicando el radio de curvatura del primer vertical por el coseno de la latitud, asociada al paralelo seleccionado, y por el grado expresado en radianes, esto es $D_p = (\pi v / 180) \cos \varphi$. Nuevamente particularizó ese valor para la ciudad de París, con una latitud de $48^\circ 50'14''$, y obtuvo 37833 toesas, 265 más que si lo hubiese calculado para el caso esférico.

Después de que publicase Newton su ley de gravitación se inició una nueva etapa en el estudio de la forma de la Tierra, a la que no fue ajeno Benito Bails. Newton fue claro en sus razonamientos: si la Tierra no girarse, todas sus partículas sometidas a la mutua atracción formarían un cuerpo globular. Sin embargo la rotación diaria sobre su eje hace que en cada punto actúe una fuerza perpendicular al mismo, que tiende a que se alargue la Tierra en la dirección del ecuador. Tal fuerza sería máxima en todos los puntos del ecuador y mínima en los polos, de ahí que la Tierra adopte con su giro la figura de un elipsoide de revolución con aplastamiento polar. Al mismo tiempo ese movimiento de rotación es la causa de que varíe la intensidad de la gravedad que actúa sobre cada uno de sus puntos, de modo que mientras estos estén más alejados del eje más pequeño, menor será la influencia de la atracción y mayor la de la fuerza asociada a dicha rotación; la conclusión es obvia, existe una dependencia entre la figura de la Tierra y el valor de la fuerza de la gravedad que actúa sobre los puntos de su superficie. Por otra parte, la fuerza de atracción, componente fundamental de la fuerza de la gravedad, depende igualmente de la distribución de las masas en el interior de la Tierra, o de su densidad, hasta el extremo de influir en su propia figura. Newton supuso que la Tierra era homogénea y calculó la relación, q , que existía entre la fuerza debida a la rotación y la de la atracción en el ecuador²²⁸, deduciendo a partir de ella el aplastamiento polar: $\alpha = 5q / 2 \approx 1/230$. Huygens siguió parecido razonamiento, con la importante salvedad

²²⁸ Ese parámetro q era el producto del cuadrado de la velocidad angular de rotación, ω^2 , por su achatamiento, α , y dividido por la gravedad en el ecuador, γ_E , es decir que $q = \omega^2 \alpha / \gamma_E$. Newton lo fijó en 1/288

de considerar que toda la masa terrestre se concentraba en su centro²²⁹, según él $\alpha = q / 2 \approx 1/576$.



Alexis Claude Clairaut como miembro de la Academia de Ciencias de París, de Londres, Berlín, Bolonia, etc. En el pie del grabado se lee Erit aliquando qui demonstret in quibus cometæ partibus errent, una de las famosas predicciones de Seneca (Cuestiones Naturales) que hacía referencia a la futuro cálculo de las trayectorias de los cometas. Se presenta también el frontispicio de su celebrado tratado, centrado en el estudio de la figura de la Tierra.

Otro hito sobresaliente en la historia de la geodesia y en el análisis de la figura de la Tierra, bajo el punto de vista gravitatorio, fue protagonizado por el matemático francés Alexis Clairaut, el cual probó que la intensidad de la fuerza de la gravedad variaba con la latitud del lugar y con el aplastamiento de la Tierra, tal como concretan las dos ecuaciones siguientes:

$$\gamma_{\varphi} = \gamma_E + (\gamma_P - \gamma_E) \operatorname{sen}^2 \varphi \text{ y } (\gamma_P - \gamma_E) / \gamma_E = 5q / 2 - \alpha,$$

definiendo el primer miembro de la segunda el llamado aplastamiento gravimétrico. Clairaut si fue un poco más allá al referirse al interior de la Tierra, puesto que supuso que estaba estructurado en capas con densidades

²²⁹ Newton supuso que la atracción de la Tierra era la suma de las acciones de todas sus partículas, Huygens, por el contrario, suponía que la atracción era constante en todos los puntos de su superficie y dirigida hacia el centro del planeta.

diferentes pero limitadas por superficies elipsoidales centradas en el mismo punto y con un solo eje de rotación, siendo arbitraria la variación de las densidades al pasar de una a otra capa. Igualmente consideró que la superficie exterior era de equilibrio, o de nivel, y que fuera de la misma no existían masas atractivas²³⁰.

Bails empleó en el tratamiento matemático de esta cuestión una notación similar a la empleada por Newton en sus cálculos. Al hallar la atracción ejercida por el elipsoide sobre un punto localizado en unos de sus polos, dedujo la que actuaría sobre otros puntos de su superficie, constatando que sería inversamente proporcional al cuadrado de las distancias a que se encontrasen. Más adelante anunció que demostraría como la figura de la Tierra, en el supuesto de que se tratase de

“una masa fluida y homogénea, su figura sería...un elipsoide cuyo eje sería $1/230$ menor que el diámetro del ecuador. Pero hemos encontrado un hecho del cual se sigue que la Tierra es heterogénea, pruébanlo también las observaciones hechas acerca de su figura, porque el grado de aplanamiento que se verificaría en el caso del esferoide homogéneo, y el aumento de pesantez desde el ecuador hacia los polos, que manifiesta el péndulo, no son puntualmente cuales los observamos”.

Posteriormente comprobó que las atracciones ejercidas en diferentes puntos del elipsoide resultaban equilibradas con “la fuerza centrífuga que se verifica en el mismo esferoide elíptico”, lo que le permitió asegurar que en tal supuesto de masa fluida y homogénea, la Tierra adoptaría, al girar alrededor de su eje, la figura elipsoidal. A continuación probó Bails que las atracciones ejercidas por un determinado “esferoide elíptico, combinadas con la fuerza centrífuga que siempre es paralela al eje mayor del elipsoide, o perpendicular al menor, causan una fuerza que es perpendicular a la superficie del esferoide”. Comprobada la figura elipsoidal de la Tierra se propuso averiguar cuál sería el aplanamiento ligado a su velocidad de

²³⁰ En la producción científica de Clairaut fue crucial su participación en la expedición comandada por Maupertuis, ya que las observaciones allí practicadas fueron determinantes para que publicase su obra más notable *La théorie de la figure de la Terre tirée des Principes de la Hydrostatique* (1743). Laplace hizo, en su *Mecánica Celeste*, la siguiente referencia de ella: *la importancia de todos los resultados y la elegancia con que son presentados sitúan esta obra en el grupo de las más bellas producciones matemáticas*. Clairaut fue admirado, en la comunidad científica europea de su tiempo, por haberse cumplido el anuncio que hizo, en una sesión solemne de la Academia de Ciencias de París (14 de noviembre de 1758), acerca del cometa Halley: predijo que aparecería a comienzos de enero del año siguiente y que su perihelio tendría lugar el día 13 de abril de ese mismo año.

rotación y a la fuerza atractiva sobre partículas colocadas en el polo y debajo del ecuador; concluyendo que el aplanamiento terrestre tenía que ser de $1/231$, “en virtud de las leyes de atracción, si la Tierra es homogénea y fue fluida en sus principios. Esta cantidad de aplanamiento discrepa poco de la que se saca de la observación, y parece que la diferencia proviene de ser la Tierra más densa hacia su centro que en la superficie²³¹. Podemos, pues, mirar esta conformidad entre el cálculo y la observación como otra prueba del movimiento de la Tierra, y de la doctrina de su atracción”.

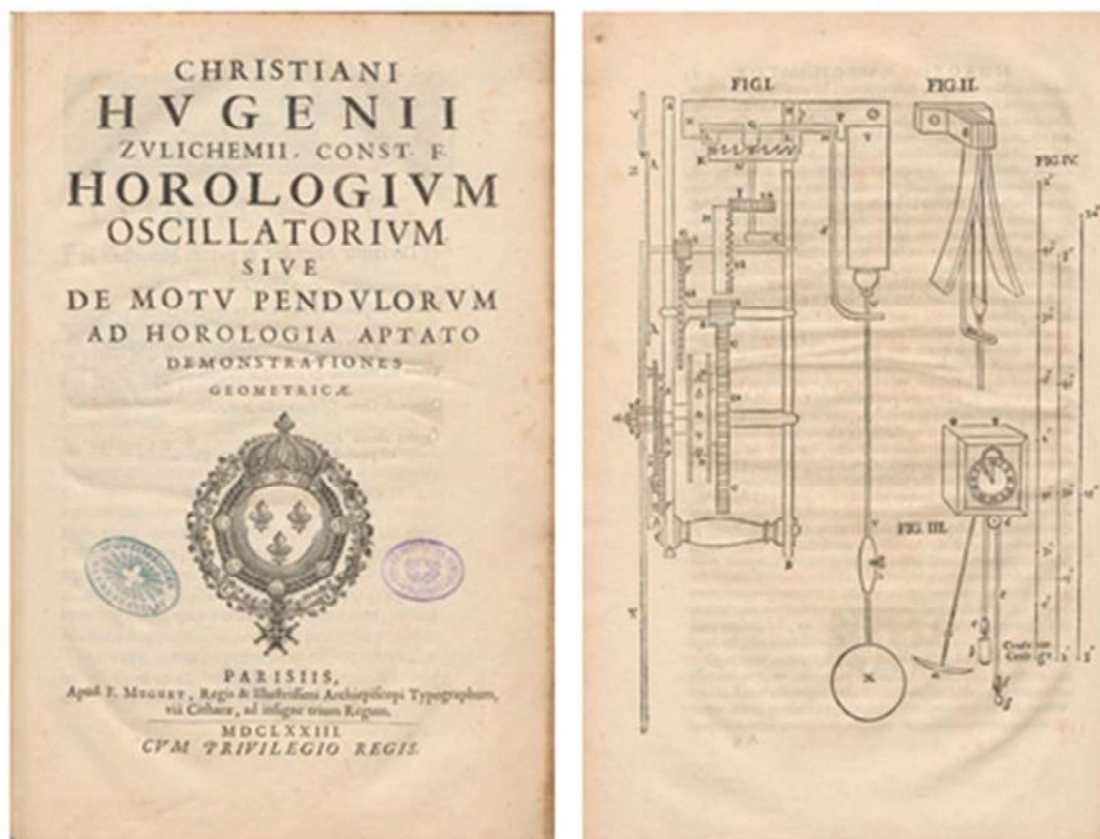
La contribución metrológica más relevante²³² de Benito Bails desarrolló el epígrafe *De la longitud del péndulo y de una medida universal*, iniciativa novedosa que precedió a la del metro y que no fue tomada en cuenta por muy diversas circunstancias, aunque resultase fundamental el que dependiera de otra unidad tan básica como el tiempo. La exposición de Bails tiene un interés histórico incuestionable, pues divulga unos hechos poco conocidos pero que contribuyeron a la implantación del patrón geodésico definitivo, aunque su primera definición estuviese tan ligada al meridiano terrestre²³³. La ventaja que ofrecía “la longitud péndulo de segundos” era el práctico isocronismo de sus oscilaciones, propiedad que Huygens aplicó al diseñar el reloj que transformó radicalmente la medida del tiempo y contribuyó decisivamente a solucionar el problema secular de la medida de las diferencias de longitudes geográficas. Bails recordaba esa

²³¹ Hoy día se supone que la densidad en núcleo terrestre es del orden de 12.8 g/cm^3 o de 13 g/cm^3 .

²³² Benito Bails dio otra lección de metrología en el tomo primero de los Principios de Matemática (pp.323-326), al referirse a las unidades de medida. Recordaba allí que los matemáticos habían elegido una especie de patrón universal: el llamado pie de Rey de París, “sexta parte de la medida que usan los Franceses con el nombre de *toesa*, y es por consiguiente entre las medidas extranjeras la que más nos importa conocer. Se divide, pues, la toesa francesa en seis partes iguales que llaman *pies*; cada pie consta de doce partes iguales llamadas *pulgadas*; en la pulgada hay doce *líneas*, y la línea consta de doce *puntos*”. Se deduce por tanto que la toesa constaba de 6 pies, o de 72 pulgadas, o de 864 líneas o de 10368 puntos. Bails mencionó también las unidades españolas, comenzando con la medida más usada en Castilla, “el pie o tercia de la vara que llaman de Burgos, mandada observar en todo el Reino por una Pragmática de Felipe II del año 1568”. Cada una de esas varas constaba pues de 3 pies, o de 36 pulgadas, o de 432 líneas o de 5184 puntos. La equivalencia entre los pies franceses y los castellanos fue hallada por Jorge Juan, como bien señalaba Bails, al establecer la igualdad siguiente: “7 pies castellanos componen 6 pies de Rey franceses con cortísima diferencia”. En función de ella dedujo Bails la relación entre las varas y las toesas: “...que cuando ocurriere reducir a varas un número dado de toesas, bastará multiplicar este por 7, y partir el producto por 3, cuyo cociente expresará las varas que vale el número propuesto de toesas”. Más adelante dio Bails la equivalencia entre los diferentes pies empleados en Europa, suponiendo que el francés tuviera 1440 partes: el pie castellano (1234.5), el pie romano (1320), el pie de Londres (1350), el pie de Bolonia (1682.4), el pie de Venecia (1540) y el pie del Rin (1391.3). Otras de las medidas españolas indicada por Bails fueron el estadal, con diez pies castellanos, las varas de Castilla, Aragón y Valencia, todas con 4 palmos, y la media cana de Cataluña, de manera que 95 palmos castellanos equivalían a 88 valencianos, a 102 aragoneses o a 100 catalanes.

²³³ La primera definición del metro lo identificó con la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano.

aportación genial del matemático holandés²³⁴, plasmada en su celebrada obra *Horologium Oscillatorium* (1673), dedicada al rey Luis XIV; en ella desarrolló perfectamente toda la teoría física del péndulo, con la deducción de las fórmulas correspondientes²³⁵.



Horologium Oscillatorium: sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae (Reloj de Péndulo, o demostraciones geométricas relativas al movimiento del péndulo aplicado a los relojes). En la primera parte de esta obra se incluyen algunas de las consideraciones de Huygens a propósito del cálculo de las longitudes en el mar.

Otra de las dificultades que impidieron la toma en consideración de ese patrón metrológico, se descubrió años después de que se presentaran las

²³⁴ En el año 1666 fue llamado a París para formar parte del grupo de sabios en torno al cual se fundó la Academia de Ciencias, allí permaneció Huygens hasta que volvió a Holanda en 1681.

²³⁵ Teniendo en cuenta la fórmula del periodo simple se demuestra que no hay tanta diferencia entre el metro y la longitud del péndulo que bate segundos. En efecto, como el periodo sería de 4 segundos y el valor de la gravedad se puede suponer próximo a los 9.8 m/s^2 , resultaría que la longitud correspondiente ($L = g/\pi^2$) valdría alrededor de 0.99295m.

propuestas al respecto²³⁶, del propio Huygens, o de los franceses J. Picard, y G. Mouton²³⁷. Bails refería así el problema planteado:

“la experiencia ha enseñado que no es una misma la longitud del péndulo de segundos en diferentes paralelos, que esta mengua desde los polos al ecuador, y que en París el péndulo ha de tener algo más de 3 pies 8 líneas $\frac{1}{2}$ para que cada vibración dure un segundo de tiempo. Después de muchos experimentos hechos con cuidadosa y sabia prolijidad por Mr. de Mairan²³⁸, Individuo y Secretario que fue de la Real Academia de Ciencias de París, consta que la longitud del péndulo ha de ser allí de 3 pies 8 lín. 57/100. La tabla siguiente da a conocer su longitud en diferentes latitudes”:

	Pulg.	lin.
Debajo del equador á 2434 toesas de altura	36	6,70
Debajo del equador á 1466 toesas	36	6,83
Debajo del equador á nivel de la mar.	36	7,07
En Portovelo á 9° 34' de latitud.	36	7,16
En el Petit-Goave, Isla de Santo Domingo, 18° 27'.	36	7,33
En el Cabo de Buena-Esperanza 33° 55'.	36	8,07
En Ginebra 46° 12', con el péndulo invariable	36	8,17
En París 48° 50'.	36	8,57
En París, despues de hechas las reducciones.	36	8,67
En Leyde 52° 9'.	36	8,71
En Petersbourg 59° 56'.	36	8,97
En Pello 66° 48'.	36	9,17
En Ponoï, en Laponia 67° 47'.	36	9,17

Longitud del péndulo a diferentes latitudes. Tabla incluida por Benito Bails en el tomo VIII de sus Elementos de Matemáticas.

Las medidas pendulares no eran nada simples, ya que había que tener presentes factores como la temperatura y la resistencia del aire o la altitud de la estación sobre la que se instalaba el péndulo, para efectuar después las oportunas correcciones. Bails recordaba que así procedió Bouguer durante

²³⁶ Este prototipo tan genuinamente físico del prototipo de medida lineal fue propuesto por primera vez el día 8 de diciembre de 1661 en el seno de la *Royal Society* de Londres. Con independencia del indudable mérito de la propuesta, no debe de olvidarse a tal efecto la correspondencia mantenida por Huygens con esa institución, entre los años 1661 y 1665.

²³⁷ Bails añadía “pero no había llegado todavía el tiempo de poner por obra ninguno de ellos, por carecer sus Autores de algunas luces indispensables para el acierto; creíase entonces que la longitud del péndulo de segundos era una misma en toda la superficie de la Tierra”.

²³⁸ Se estaba refiriendo Bails al astrónomo y geofísico Jean-Jacques d'Ortous de Mairan, su toesa fue usada como patrón metrológico en la medida del meridiano efectuada en varios estados.

sus observaciones americanas, pudiendo determinar después la longitud del péndulo que batía segundos, tanto en aquellas latitudes ecuatoriales (36 pulgadas, 7 lin.21) como en París (36 pulgadas, 8 lin.67). También hacía ver Bails una de las posibles ventajas que ofrecía la longitud del péndulo de segundos como patrón metrológico: “...si una medida determinada llegara a perderse, sería sumamente fácil restituirla: todo se reduciría a colgar una bala de plomo de un hilo muy sutil, y buscar por medio de repetidos experimentos cuanto debería coger de largo este hilo para que siguiera con perfecto concierto las vibraciones de un reloj de segundos bien arreglado”.

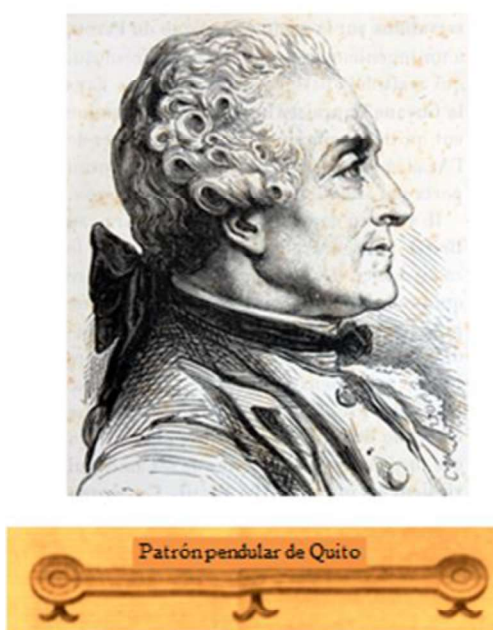
También recordó Bails el famoso experimento llevado a cabo en Cayena por J. Richer, y como se tuvo que acortar la longitud del péndulo de París para que batiese segundos. Tan novedosos resultados no fueron en principio comprendidos por la comunidad científica, hasta que volvieron a obtenerse en diferentes latitudes; concretamente en las efectuadas durante las mediciones del grado terrestre en el virreinato del Perú y en Laponia. Bails zanjó la cuestión en estos términos: “quedó averiguado y constante que el péndulo de segundos es más corto debajo del ecuador, y más largo debajo del círculo polar que en París, y que por consiguiente un mismo cuerpo pesa en París menos que en Tornio, y más que en Quito”.

Comprobada la variación de la gravedad con la latitud y por tanto la de la longitud del péndulo de segundos, Bails se pronunció claramente a favor de que debería tomarse como patrón lineal la que presentase en el ecuador: “que está en medio de la Tierra y es el término de la menor gravedad, el término desde el cual se cuentan las latitudes, término por otra parte único y acerca del cual pueden conformarse las diferentes naciones...solo debajo del ecuador se pueden observar con la correspondiente escrupulosidad la longitud del péndulo, y solo el ecuador da al mismo tiempo un término fijo que no se puede confundir con otro ninguno”.

Análogas consideraciones debió hacer La Condamine cuando decidió que la longitud hallada en Quito quedase materializada en aquella ciudad. El nuevo patrón fue descrito con todo detalle por Bails:

“hizo empotrar y emplomar con unos gatillos curvos en una mesa de mármol blanco, de 5 pulgadas de grueso, una regla de bronce de un dedo de grueso y unos 3 pies y una pulgada de largo. La superficie exterior de esta

regla, desbastada y limada a nivel del mármol, remata en cada extremo en un plano circular de una pulgada de diámetro. Desde el centro del uno de los círculos al centro del otro se trazó en toda su longitud de la regla una línea profunda igual a la longitud del péndulo de segundos, cual se halló en Quito, es a saber, de 3 pies 6 lin. $83/100$...en el centro de cada uno de los círculos que terminan la regla de bronce, se encajaron dos clavos de plata de una línea de grueso, a manera de tornillo de cabeza perdida, y en el centro de cada tornillo de plata, una aguja de oro también atornillada”.



Charles Marie de La Condamine y un dibujo del patrón pendular que mandó construir en Quito. El dibujo fue incorporado por Bails en el capítulo metrológico de sus Elementos de Matemática (octavo volumen).

Bails reconoció no obstante que la propuesta no fue aceptada ni siquiera en el país de su principal impulsor, donde lejos de aceptar la longitud del péndulo optaron por conservar como medida única e invariable el Pie de Rey de París, en alusión a Carlomagno, al que también denominaban toesa del Chatelet, que venía usándose como patrón desde 1687. Bails describió asimismo ese prototipo metrológico tan característico de Francia:

“En el año de 1668²³⁹ se reformó en París la antigua toesa de los Maestros de Obras, se la acortó 5 líneas, y se tuvo la precaución de poner al pie de la

²³⁹ En ese mismo año decidió el ministro Jean Baptiste Colbert, como Ministro de Estado y *Surintendant des Bâtiments, Arts et Manufactures*, que esa toesa fuese el patrón metrológico por excelencia de Francia.

escalera del gran Chatelet²⁴⁰ de aquella ciudad un *Padrón*, o una barra de hierro terminada por dos eminencias o redientes que se levantan perpendicularmente a la toesa, por entre los cuales debía entrar ajustada una toesa; creyóse desde entonces que este era el medio más seguro para que saliesen perfectamente iguales todas las toesas que se determinasen por este padrón”.

La toesa del gran Chatelet sirvió de referencia para todas las operaciones geodésicas emprendidas por los franceses en el siglo XVIII. El uso más trascendente fue el de Picard, el cual creía que se trataba de la medida más segura y empleada en Francia. A él se debió la primera comparación rigurosa entre una reproducción de la misma y la longitud del péndulo de segundos, que resultó ser de 36 pulgadas y 8.5 líneas. Picard indicó asimismo el lugar en que se depositarían ambos patrones: “*La longueur de la Toise de Paris, & celle du pendule à secondes, telle que nous l’avons établie, seront soigneusement conservées dans le magnifique Observatoire que Sa Majesté fait bâtir pour l’avancement de l’Astronomie*²⁴¹”. No obstante, agregaba Bails que el modelo materializado en el castillo se fue deteriorando con el tiempo, hasta el punto de que en 1735 “ya no podía determinar una medida fija y cabal”. Por otra parte era difícil de recuperar, pues en la base de Villejuif-Juvisy no se podía fijar ya, sin incertidumbre, uno de sus extremos; de manera que, como él mismo apuntaba, podría haberse suplido con la longitud del péndulo ya mencionada, de 36 pulgadas y 8.5 líneas²⁴².

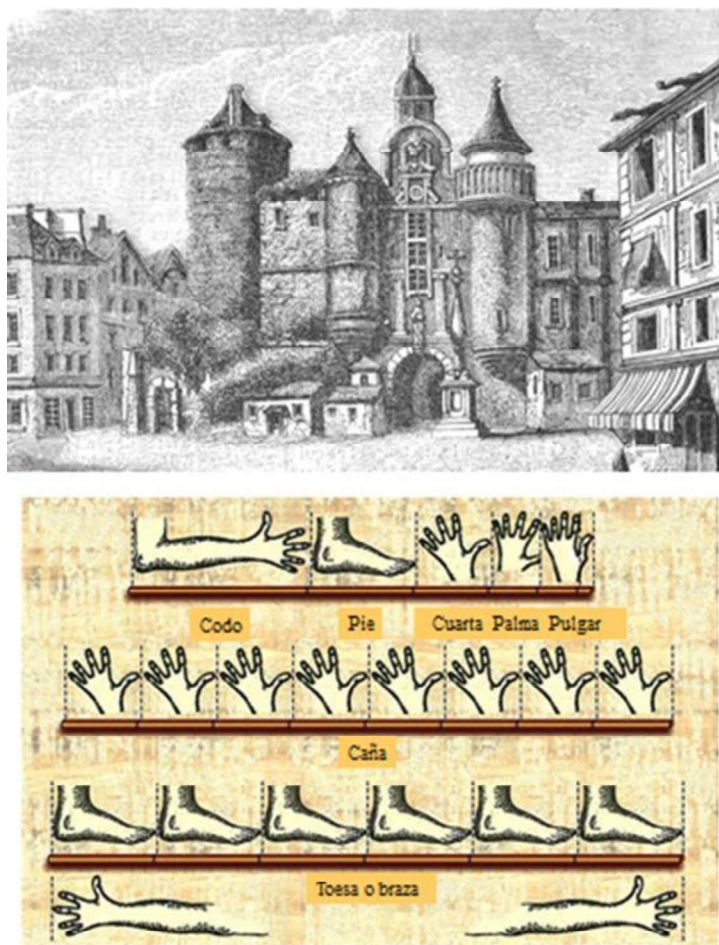
Picard no fue el único que se hizo con una réplica de la toesa del Chatelet, ya que el astrónomo Guillaume le Gentil le comunicó a Lalande, en 1756, que había visto una toesa un poco más larga en manos de Cassini. Bails comentó también que la fabricada por el instrumentista Jacques Canivet era asimismo mayor que la llamada toesa de Perú. A propósito de esta última conviene recordar, como hizo Bails, que antes de partir para América, los expedicionarios mandaron fabricar dos réplicas de hierro que fueron

²⁴⁰ Este castillo de París fue demolido a lo largo del siglo XIX. Actualmente ocupa su lugar la Place de Chatelet, a orillas del Sena.

²⁴¹ La longitud de la Toesa de París y la del péndulo de segundos, como hemos señalado, quedarán cuidadosamente custodiadas en el magnífico Observatorio, que Su Majestad mandó construir para el desarrollo de la Astronomía.

²⁴² Sin embargo tampoco se trataba esta de una longitud fiable, pues la toesa empleada por Picard era una milésima menor de lo debido, como se constató al medir de nuevo la distancia entre los vértices Brie-Comte-Robert y Montlherý.

contrastadas, por Godin, con el patrón del castillo parisino²⁴³. Las dos nuevas toesas se contrastaron en la Academia de Ciencias, como explicó Bails: “se las aplicó, por medio de una lente, un compás de vara armado con dos puntas, bien que en este método se puede padecer una equivocación de 1/25 de línea; también se compararon una con otra, arrimándolas encima de una mesa, y las dos caras de extremo, tentándolas y mirándolas con una lente, siempre parecieron perfectamente continuas”.



El Castillo de Châtelet y medidas de longitud francesas, previas al metro. En una de las entradas del edificio se encontraba el primer patrón de la toesa, el cual fue destruido, en el año 1802, al iniciarse la demolición del mismo.

Casi coincidiendo con esa comprobación, Mairan había encargado al fabricante Claude Langlois, tío de Canivet, “una regla en todo semejante a la que se ha llevado a Perú”, para servirse de ella en los experimentos pendulares que pensaba realizar, a fin de hallar la longitud del que batía segundos. A propósito de esta toesa de Mairan, surgió una polémica más

²⁴³ Bails apostillaba: “con la exactitud que cabía en un modelo desfigurado al cabo de 65 años de servicio”.

que no favoreció en nada las difíciles relaciones entre Bouguer, La Condamine y Godin. El primero manifestó en la Academia (1756) que él mismo había visto como se había comparado con ella la toesa del ecuador y la del círculo polar, también construidas por Langlois. Sin embargo “La Condamine no se acordaba de que la toesa de Mairan se había cotejado con la de Perú en la Academia (1735), ni de haberle oído a Godin que las hubiese confrontado, pero tenía muy presente que la del Perú se cotejó con la que había de quedar en París”. Esa última toesa que La Condamine había dejado depositada en la Academia, se la llevó Maupertuis a Laponia pocos meses después, quedando en París solo la de Mairan, aunque “se suponía cabalmente igual que las otras dos, por haberlas hecho todas tres un mismo artífice”.

Finalizadas las dos mediciones de grado, patrocinadas por la Academia de París en la zona ecuatorial y polar, se volvieron a comparar las tres réplicas de la toesa, resultando, de acuerdo con Bails, lo siguiente: “la toesa del ecuador era $1/20$ o $1/30$ de línea más larga que la del Norte, y la de Mairan $1/15$ de línea²⁴⁴ más corta, por manera que hay como unos $8/75$, o más de una décima de línea de diferencia, en 864 líneas, entre la toesa de Mairan y la del ecuador”. Bails intentó explicar las discrepancias observadas manifestando que al volver del golfo de Botnia había naufragado la embarcación que transportaba la toesa y que esta se había oxidado, de manera que podría haberse acortado al limpiarla. Sin embargo recordaba también que el matemático y astrónomo de la misma Academia, Charles Étienne Louis Camus²⁴⁵ indicó a la misma, durante la sesión del 3 de julio de 1756, que la toesa en cuestión no había resultada afectada por aquel episodio, aunque “confesó que había puesto el patrón a la lumbré, que la toesa no cabía en él, y que el día 28 de junio de 1756 se había limado el patrón, a fin de que entrara la toesa antes de valerse de ella en la medición del día 1 de julio de 1756; hay, pues, motivo para creer que esta toesa del norte pudo en sus principios ser igual con la del ecuador”.

A juicio de Bails la toesa de Mairan se había mantenido inalterable desde que fue construida, “es pues, preciso que desde su principio no fuese igual con las demás. No hay apariencia de que el calor de la zona tórrida, ni los

²⁴⁴ Al equivaler la toesa a 1.949 m, la línea tendría 2.25 mm.

²⁴⁵ Fue el autor de la obra *Degré du méridien entre Paris et Amiens déterminé par la mesure de M. Picard et par les observations de MM. de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, d'où l'on déduit la figure de la terre par la comparaison de ce degré avec celui qui a été mesuré au cercle polaire* (1740).

embates en los viajes hayan hecho la toesa del ecuador más larga de lo que era; se ha mantenido en un estuche muy sólido, y el calor es muy poco en Quito”. Cuando los expedicionarios volvieron de América, quedó depositada esa toesa en el Gabinete Real de Historia Natural en el año 1748, trasladándose a la sede de la Academia de Ciencias el 8 de agosto del año 1770. Bails subrayaba que desde entonces “se mantiene muy bien conservada y entera, y las esquinas no han padecido la más leve alteración”. Sin embargo, la estabilidad métrica de la regla parecía quedar en entredicho, cuando acto seguido afirmaba. “el corte que determina la longitud de la toesa del ecuador no es puntualmente perpendicular a dicha longitud, estos cortes entran algún poco hacia el fondo donde forman una toesa más corta; pero su parte exterior es la que se ha escogido para la verdadera longitud de esta toesa, todos los padrones se han hecho de modo que el principio de dichas aristas entra en ellos rozando, pero sin violencia”.

El rey Luis XV, mediante orden del 16 de mayo de 1766, dispuso que la nueva toesa de referencia seria la del ecuador, encargándose a Canivet la fabricación de 80 réplicas de la misma; este patrón modificado siguió siendo válido en Francia hasta la implantación del metro por la ley del 1 de agosto del año 1793. Las copias fueron enviadas a diferentes ciudades francesas y destinadas también a las medidas del grado que realizó Liesganig, en Austria y Hungría, y Beccaria en el Piamonte; asimismo usó este modelo Maskelyne para expresar en la nueva unidad lineal los resultados obtenidos por Charles Mason y Jeremiah Dixon en su campaña norteamericana. Bails hizo un firme alegato en favor de este patrón, ponderando la importancia de su empleo por los miembros de la Academia de París, al repetir la medición de Picard y al determinar la longitud del péndulo de segundos, en varios de los países ya citados en la tabla reproducida en páginas anteriores.

Lalande, por su parte, creía que a ella deberían referirse todas las medidas previas, un proceso un tanto engorroso, como bien señalaba Bails:

“para este fin se deben rebajar 7 toesas del grado de Italia que se valuó por la toesa de Mairan, se debería rebajar 3 toesas del grado del Norte, en el supuesto de que la toesa del círculo polar discrepase $\frac{1}{25}$ de línea de la del ecuador, al tiempo mismo que se ejecutó la medición del Norte, cuyo supuesto no es verosímil; pero se han de rebajar 0.05 de la medida del

péndulo que ejecutó Mairan, que se reduce a 440 lin.52, y 3 toesas del grado que en 1756 se infirió de la base de Villejuif...A la toesa de París, medida tan conocida de todos los Sabios, referiremos las principales medidas de Europa”.

	toesas	
La milla Romana que cita Plinio.....	757,5	
La milla Romana de Estrabon , segun Casini (<i>M. ac.</i> 1702).....	766	
La milla moderna de Roma, segun el Ab ^{te} . Boscovich.	764	
La milla de Italia de 60 al grado.....	958	
La milla de Inglaterra.....	830	
El Lí de los Chinos que es la 193 ^{ma} parte del grado..	295	
El estadio de los antiguos Romanos , de 623 pies rom.	94,693	
El estadio Egipcio , segun Freret y Mr. le Roy (<i>Rui-</i> <i>nes des Monumens de la Grèce</i>).....	114,13	1 pulg. lin.
El pie de los antiguos Romanos (<i>Mem. Acad.</i> 1757).....	10	10,90
El pie Griego sacado del Capitolio , por Auzout.....	11	3,80
El pie Griego , segun Mr. le Roy	11	4,56
El pie Arabe (<i>Antig. mém. de l' Acad. Tom. VI. pag. 532</i>).....	9	10,72
El pie de Alejandria. <i>Ibid.</i>	13	2,90
El codo de los Hebreos , segun Eisenschmid.....	19	10,40
El pie de Inglaterra (<i>Philos. trans.</i> 1768. <i>pag.</i> 326).....	11	3,1154
El pie del Rhin , de Leyde , y de Dinamarca , segun Lulofs....	11	7,183
El pie de Bolonia , decima parte de la <i>Percha</i> , segun Auzout..	14	0,60
El pie de Turín , segun el Padre Beccaria.....	18	11,70
El <i>Braccio da panno</i> de Florencia , segun el Ab. Ximenez.....	21	6,454
El pie de Venecia , segun Christiani (<i>Delle misure d' ogni genere</i>)..	12	10,0
El pie de Padua , segun Christiani.....	15	9,9
El pie de Viena , en Austria , segun el Abate Hell.....	11	8,117
La vara de Castilla (<i>Mém. Acad.</i> 1747).....	30	11,0
El palmo romano moderno , segun el Abate Boscovich.....	8	3,033
El palmo de Napoles , segun Auzout.....	9	8,15
El pie de Suecia (<i>Mém. Acad.</i> 1714).....	10	11,75
El arquin de Rusia , por los m. s. de del' Isle.....	26	6,30
El pie real de la China , <i>ing-cau-chi</i> , ó <i>ing-ti'ao-tchi</i> (<i>Observ.</i> <i>astron. Pekini factæ</i> , <i>Tom. I. pag.</i> 363).....	11	9,9

Tabla de las principales medidas de Europa antiguas y modernas, reducidas a toesas, pies, pulgadas, líneas y decimales de línea, medida de la Real Academia de las Ciencias y del Gran Chatelet de París.

Se culmina esta contribución metrológica de Bails con una interesante digresión que efectuó a propósito de una medida universal, al terminar el prólogo que hizo para el primer tomo de sus Elementos de Matemática: “Hemos dado al pie francés por término de comparación de todas las medidas de distancias, por haberle granjeado esta prerrogativa el gran número de estuches de Matemática Franceses que se han distribuido en

Europa, y traen todos un tanto del expresado pie. La toesa, que de él se deriva, es días ha la medida más conocida y usada de los Matemáticos²⁴⁶”. Asimismo recordaba Bails que la toesa había sido la unidad lineal a la que se redujeron todas las de “la operación geométrica más celebrada de cuantas duran en la memoria de los hombres; no solo la han usado los franceses para medir los grados del meridiano terrestre en Europa, África y América, sino que también a ella han reducido el resultado de sus operaciones el abate Boscovich, el abate Liesganig y el P. Bercaria que han ejecutado separadamente la misma medición en Italia, Hungría y Piamonte”. También empleó la misma unidad Huygens cuando calculó el espacio recorrido por un grave en el primer segundo de su caída y la longitud del péndulo de segundos en el paralelo de París.



Midiendo una base con reglas de dos toesas. Ilustración de la obra La meridienne de l'observatoire royal de Paris, verifiée dans toute l'étendue du royaume par de nouvelles observations (M. Cassini de Thury. 1744).

Bails justificaba su posición, de no haber utilizado la vara como unidad en muchas de las determinaciones hechas en sus Elementos de Matemáticas, para que así pudiesen practicarlo sus posibles lectores, “una vez que hemos señalado la correspondencia entre el pie Francés y el pie Castellano, o la tercia de la vara de Burgos”. Su proceder fue el mismo que siguió Newton, cuando se refirió a las medidas francesas, tal como indicaba Bails: “fuese reverencia, fuese escrúpulo, las dejó sin reducción ninguna conforme las había publicado sus autores”. El último alegato de Bails en favor de un

²⁴⁶ Bails citaba unos cuantos autores al respecto: Christian Wolff, Antonio Lecchi, Ignazio Michelotti, F. Odoardo Gherli, Vito Caraveli y Girolamo Francesco Christiani.

patrón metrológico internacional merece ser reproducido en su integridad: “últimamente, después de maduro acuerdo nos pareció decoroso, cuando no fuera obligación, conformarnos con el mayor número de los escritores de Matemáticas, que confiesen ser el pie de Rey de París la medida a la cual se refieren todas las demás. Hanlo hecho para darse mejor a entender unos a otros, del mismo modo que sería más fácil la comunicación entre las diferentes Naciones, si, a lo menos para el trato exterior, se convinieran en hablar todas una misma lengua”.

Cuando Bails cerró ese paréntesis metrológico²⁴⁷, quiso explicar una última aplicación de la atracción ejercida por la Luna y el Sol sobre la Tierra, interesante contribución que tituló *Del Flujo y Reflujo del Mar*. Con ella demostró estar al tanto de las teorías científicas más recientes, tomando partido por las aportaciones de Newton al estudio de tan sorprendente fenómeno. El mérito de Bails por divulgar entre sus alumnos las primeras explicaciones razonadas de las mareas es innegable, máxime en una época en la que permanecían anclados en el recuerdo los intentos baldíos de explicar su causa acudiendo solamente a los movimientos, diario y anual de la Tierra²⁴⁸. En principio distinguió tres tipos de movimientos: diario,

²⁴⁷ En el capítulo dedicado a la Topografía se traerá a colación otra contribución metrológica de Bails, en la que volverá a insistir más extensamente sobre la conveniencia de establecer un patrón universal.

²⁴⁸ Quizás fuese el explorador griego Pytheas el primero en asociar el fenómeno de las mareas a la Luna, llegando a descubrir además que no solo había dos grandes cada día lunar, sino que también averiguó que su amplitud dependía de las fases de la Luna. Son igualmente conocidas las observaciones que efectuó Posidonio, doscientos años después, en las costas gaditanas, comprobando que las alturas de la marea eran mucho mayores que en su Siria natal. Estrabón incluyó en su Geografía, un siglo más tarde, una aproximación teórica al estudio de las mareas, describiendo con cierto detalle el flujo y reflujo, que consideró máximo durante la conjunción y mínimo en la oposición. Sin embargo tuvieron que pasar casi 1600 años para que pudiese aclararse su verdadero origen. Tras el descubrimiento de América, llegó a pensarse que las mareas eran causadas por la Luna, pero también por la oscilación del agua entre sus costas y Europa; así lo defendía el humanista italiano Giulio Cesare Scaligero en el año 1557. Kepler explicó en su *Astronomia Nova* que dependían de las fuerzas atractivas ejercidas por la Luna y el Sol, aunque creyera que se trataba de fuerzas de tipo magnético. Curiosamente fue criticado con severidad por Galileo, el cual manifestó su sorpresa porque Kepler estuviese interesado en la acción de la Luna sobre el agua, en fenómenos ocultos y en otras chiquilladas. Y es que Galileo defendía, apoyándose en las tesis copernicanas sobre la rotación terrestre, que las mareas eran ocasionadas por el efecto combinado de la rotación de la Tierra sobre su eje y de su traslación alrededor del Sol; dos movimientos que causarían las oscilaciones del agua observadas en forma de mareas. La teoría anterior fue abrazada y ampliada por el matemático inglés John Wallis, en 1666, aunque seguían sin aparecer una teoría que proporcionase resultados acordes con la observación. La solución del problema se incluyó en la obra más sobresaliente de Isaac Newton, explicándose con su teoría tres de las propiedades fundamentales de las mareas, a saber: el periodo principal de 12 horas lunares, la dependencia de su amplitud de las fases de la Luna y la desigualdad diaria. No obstante, el impulso definitivo para el avance matemático en la teoría de mareas fue debido a P. Laplace, al introducir en su estudio la teoría del potencial, tal como explicó ante la Academia de Ciencias de París en 1775. Más tarde la amplió considerablemente en su Tratado de Mecánica Celeste, presentando en él la fórmula que lleva su nombre y que expresa el potencial de marea como función de la latitud, de la declinación y del ángulo horario. [Ref. *A concise history of the Theories of Tides, precession-nutation and polar motion (from antiquity to 1950)*. Martin Ekman.1993]

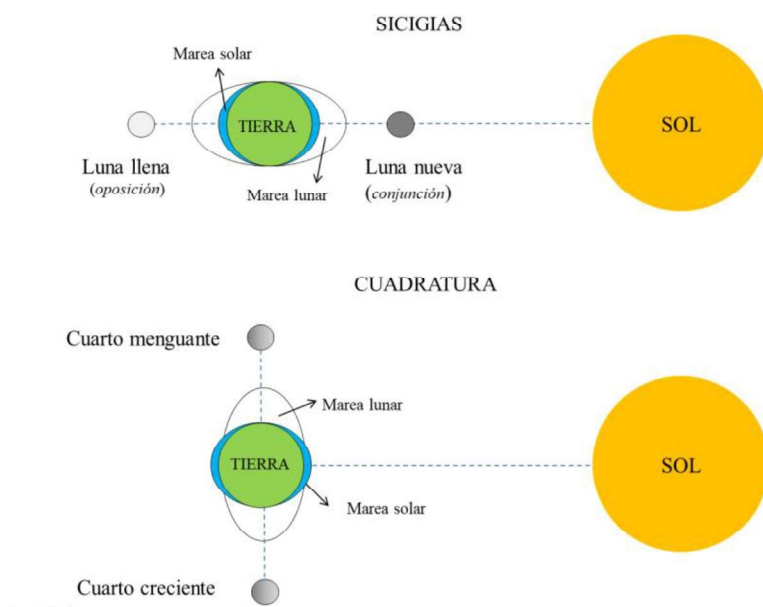
mensual y anual, por el primero “las aguas del Océano suben y bajan dos veces cada día; cuando suben se llama *Plena mar* o el *Flujo*, y cuando bajan *Reflujo*. El flujo y reflujo son mayores en las sicigias que en las cuadraturas y este es el movimiento mensual. Finalmente, como las mareas son mayores en el invierno que en el verano, de esta circunstancia se origina el nombre de movimiento anual que se les da a las aguas del Océano”.

Seguidamente explicó Bails los pormenores de tales movimientos, señalando para el primer caso que el periodo del movimiento diario era de 24 horas solares y 48 minutos, justo el tiempo que tardaba la Luna “en restituirse al meridiano de un lugar cualquiera de la Tierra”. La dependencia de la Luna era pues manifiesta, recordando Bails la opinión de Cassini II, según la cual para determinar con rigor la hora en que serían máximas las mareas del novilunio y del plenilunio “se debe atender a la hora en que se verifica la verdadera conjunción u oposición del Sol , y a la ecuación del movimiento lunar...las dos mareas que hay cada día no siempre son iguales: las de por la mañana son mayores que las de por la tarde en invierno, y menores en el estío, particularmente en las sicigias de los luminares”.

Bails continuó después describiendo cada uno de los tipos de mareas, indicando que las de mayor amplitud se producían cada mes poco después de las sicigias del Sol y la Luna, “mengando cuando la Luna pasa a las cuadraturas, y poco después son mínimas”. Otro hecho del que dependía la amplitud de la marea era de la distancia existente entre la Luna y la Tierra, siendo mayor cuando esta es mínima “y en razón mayor que la inversa de los cuadrados de las distancias, según consta de varias observaciones”. La tercera razón que adujo como causa del aumento de la amplitud fue la distancia de la Luna al plano del ecuador, máxima cuando “está en la equinoccial y menga al paso que va creciendo la declinación de la Luna”.

En cuanto a la amplitud de las mareas producidas por la atracción del Sol, sería mayor cuanto menor fuese su distancia a la Tierra, de manera que serían mayores en invierno que en verano. Bails puso el ejemplo siguiente: “las distancias de la Luna perigea fueron las mismas el día 19 de Junio de 1711 y el día 28 de diciembre de 1712; la marea fue el primer día de 18 pies 4 pulg. Y el segundo de 19 pies 2 pulg. Siendo en la última observación algo menor la declinación de la Luna que en la primera”.

También apuntaba Bails la dependencia del tamaño de las mareas de otros factores, tales como la latitud, la localización del lugar con relación al océano desde el que se propagan, o la geomorfología del litoral, etc.



Las mareas altas, vivas o de sicigia se producen con la luna llena o nueva, es decir cuando la Luna la Tierra y el Sol están alineados. La marea de la luna nueva también es llamada de conjunción, como la de la luna llena lo es de oposición. Las mareas muertas, bajas o de cuadratura se producen durante las fases de cuarto menguante y de cuarto creciente, esto es, cuando los centros de los dos luminares y el de la Tierra forman un ángulo recto.

Cuando adquiere mayor interés el relato de Bails es cuando se adentra en el estudio analítico de la cuestión, señalando que cualquier observador perspicaz podía constatar como “el periodo del movimiento diario del Océano es el mismo que el del regreso de la Luna al meridiano del lugar, el mismo que el del movimiento mensual de la Luna respecto del Sol: el influjo de los dos luminares en este fenómeno se manifiesta, porque las mareas son tanto mayores, cuanto menos distan de la Tierra los dos astros”. El problema de cuantificar, y predecir con fiabilidad dicho movimiento se resolvería una vez contestadas las preguntas que formuló Bails: 1) ¿Pero cuál es la fuerza que desde el Sol y la Luna es causa de que las aguas suben y bajan dos veces al día?, 2) ¿Cómo se auxilian una a otra en las sicigias de los dos luminares y se destruyen en sus cuadraturas?, 3) ¿Por qué son mayores en las menores distancias y menores en las mayores distancias?, 4) ¿Cómo son más poderosas cuanto menor es la declinación de la Luna y menos eficaces cuando es mayor esa declinación? Y 5) ¿Por qué algunas

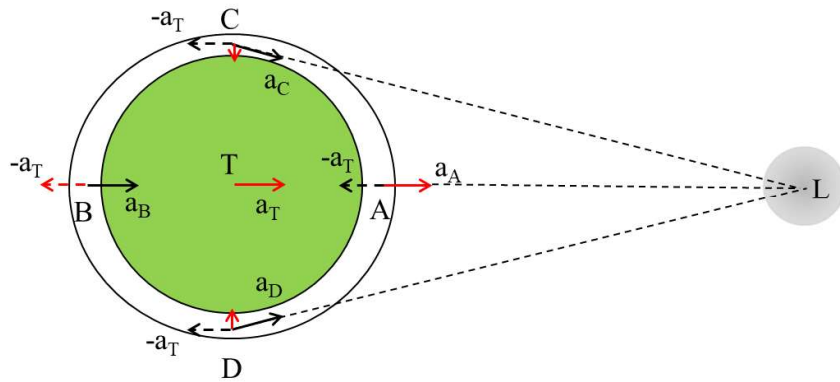
veces causan una marea mayor cuando el Sol y la Luna están debajo del horizonte, que cuando ambos están en la periferia superior del meridiano?

La comprensión de las posibles respuestas se facilita, un tanto, al pensar que el tamaño de la Tierra no es del todo despreciable comparado con sus distancias al Sol y a la Luna; de manera que, independientemente de su forma, las fuerzas luni-solares ejercidas sobre los distintos puntos de la Tierra han de ser diferentes. En consecuencia, la fuerza perturbadora actúa sobre todos ellos en función de las referidas distancias y siguiendo las direcciones determinadas por los puntos considerados y los dos luminares. Por otra parte, si la Tierra fuese completamente rígida, las tensiones anteriores apenas serían perceptibles al no poderse alterar la posición de los puntos atraídos, no siendo así, la acción de las fuerzas atractivas del Sol y de la Luna, en mayor medida, provocarán desplazamientos en ciertas partes de la superficie terrestre, los cuales son la manifestación más tangible de lo que hemos denominado mareas de flujo y reflujo.

La cuantificación de tales fuerzas se simplifica al suponer que la Tierra está envuelta por las aguas oceánicas y considerando que la Luna las atrae hacia ella a todas las partículas de su superficie, de acuerdo con la ley de gravitación universal. Es decir que produce en ellas aceleraciones inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre la partícula y el centro de la Luna. La resultante de todas ellas actuaría en el centro de la Tierra, con un valor dado por la expresión $a_T = Gm / r^2$, siendo G la constante gravitacional²⁴⁹, m la masa de la Luna y r la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra.

Supuestos cuatro puntos A, B, C y D de ese océano envolvente, tal como aparecen representados en la figura adjunta, la aceleración en el primero a_A sería mayor que a_T , al contrario de lo que sucedería en el punto B. La explicación es que sus valores responden a las dos expresiones siguientes: $a_A = GM / (r - R)^2$ y $a_B = GM / (r + R)^2$, R sería el radio de la Tierra esférica.

²⁴⁹ También llamada constante de gravitación universal. Su valor es próximo a $6.67 \text{ E-11 m}^3 / \text{kg s}^2$.



Aceleraciones que actúan sobre los puntos de la Tierra al formarse las mareas. Los puntos A y B se encuentran en el ecuador y los C y D en los polos.

En términos relativos se cumpliría que $a_A - a_T = Gm \left[\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{r^2} \right]$, o bien $a_A - a_T = Gm \frac{2rR-R^2}{(r-R)^2}$, como el valor de R , en comparación con el de r , es pequeño, podría aproximarse esta diferencia por la fórmula $a_A - a_T = Gm \frac{2R}{r^3}$. Esa diferencia y la $a_B - a_T$ son similares, estando dirigidas las dos desde el centro de la Tierra, de modo que ambas debilitan la intensidad de la gravedad sobre la superficie terrestre. En cambio, sobre los puntos C y D, las aceleraciones a_C y a_D serían tales que al componerlas con la aceleración opuesta a_T , incrementaría el valor de la intensidad de la gravedad en los dos polos de la Tierra. En los puntos intermedios entre C y A, A y D, las aceleraciones resultantes se dirigirían hacia el lado del semicírculo del punto A, mientras que entre C y B, B y D, lo estarían hacia el otro semicírculo. Si se descompusieran las aceleraciones resultantes, por medio del radio y de la tangente, se producirían en esos puntos intermedios incrementos, positivos o negativos, elementales de la intensidad de la gravedad, a la vez que aceleraciones dirigidas hacia el punto A en el hemisferio CAD y hacia el punto B en el CBD.

La consecuencia evidente es que el agua se desplazaría, en una mitad de la Tierra, hacia el punto A, en cuyo cenit se encontraría la Luna; en la otra se movería hacia el punto B, en cuyo nadir se hallaría la Luna. En otras palabras, por la acción de la Luna, el océano envolvente adquiriría la forma de un elipsoide, cuyo eje mayor se dirigiría hacia la Luna, teniendo lugar la marea de flujo en el entorno de los puntos A y B, así como la de refluo en el de los puntos C y D. Ahora bien, la rotación diaria de la Tierra hace que las protuberancias acuosas vayan apareciendo sucesivamente en lugares

diferentes, de tal forma que en el intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones homónimas de la Luna darán la vuelta al mundo y en cada lugar se observarían dos flujos y dos reflujos.

La atracción solar también ejerce su influencia sobre ese océano, produciendo mareas de flujo y reflujo, aunque 2.2 veces menores que las lunares. En efecto, la aceleración relativa, con relación al centro de la Tierra, sería en este caso igual a $GM 2R/ D^3$, siendo M la masa del Sol y D su distancia a la Tierra; la relación entre esta y su homóloga lunar sería por lo tanto igual a $m D^3/ M r^3 \approx 2.2$, una vez sustituidos los valores correspondientes²⁵⁰. Estas mareas solares no se aprecian aisladamente, por que aparecen superpuestas a sus homólogas lunares. Como es ya sabido, durante los novilunios y plenilunios se suman las acciones de la Luna y del Sol, resultando la máxima marea de flujo. Por el contrario, durante los cuartos de Luna creciente y menguante, el flujo lunar coincide con el reflujo solar, ocasionando la mínima marea de flujo²⁵¹.

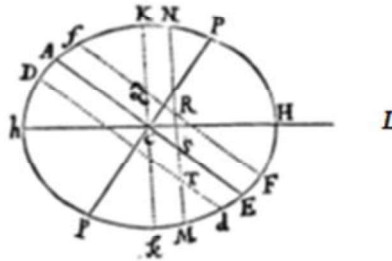
Bails se pronunciaba en parecidos términos al explicar las mareas: “lo primero que hemos de demostrar, es que la atracción del Sol o de la Luna considerada separadamente, obrando en una capa de fluido muy delgada que rodea el globo, ha de hacer que dicho fluido forme una figura elíptica”. Seguidamente consideró la acción ejercida por las fuerzas de atracción lunar, deduciendo que

“por este motivo las aguas se levantan no solo hacía el lado donde está el astro que las atrae, más también hacia el lado opuesto, porque si el astro atrae las aguas superiores más de lo que atrae al centro de la Tierra, también atrae al centro de la Tierra más que a las aguas inferiores, y estas se quedan atrás respecto del centro, tanto como las aguas superiores se adelantan hacia el astro que las atrae. Y como todos los círculos de la Tierra cuya sección común se dirige hacia la Luna toman la misma figura, de aquí se origina un elipsoide prolongado”.

²⁵⁰ La masa del Sol es aproximadamente 333000 veces la de la Tierra, y esta es 81 veces mayor que la de la Luna; aparte de que $D \approx 390 r$. Newton sobrevaloró la influencia lunar, fijando la relación en 4.5. Bails la redujo solo a 3, aunque dijese también que la fuerza de la Luna era dos o tres veces mayor que la del Sol.

²⁵¹ No obstante, el fenómeno es más complicado, pues la Tierra solo está cubierta parcialmente de agua y las mareas se topan con litorales diferentes, además de sufrir rozamientos en el lecho marino. Tales hechos retardan la llegada de la marea máxima con relación a la culminación lunar sobre el meridiano. Asimismo, la amplitud de la marea varía con el lugar, siendo casi imperceptible en los mares internos. El rozamiento de la ola de flujo con las partes sólidas de la Tierra contribuye al aumento del periodo de rotación de la Tierra en torno a su eje.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet $ApEP$ Tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; Pp , polos; AE Aequatorem; F locum quemvis extra Aequatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter subiectum; b locum huic oppositum; K, k loca inde gradibus 90 distantia, CH, Cb Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; & CK, Ck altitudines minimas: & si axibus Hb, Kk describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem Hb describatur Sphærois $HPKbpk$; designabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt CF, Cf, CD, Cd altitudines Maris in locis F, f, D, d . Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM , lecantem parallelos Ff ,



Fragmento de la exposición sobre las mareas en los Principia de Newton (Libro III. MUNDI SYSTEMATE. Prop. XXIV. Theor. XX. Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lune oriri debere. Página 431). La figura muestra la deformación producida por la marea sobre la superficie oceánica de la Tierra: Pp es el eje del mundo, AE es el ecuador y L materializa la dirección de la Luna.

Después de analizar la fuerza perturbadora del Sol sobre las aguas oceánicas, la comparó con la ejercida por la Luna, para concluir que los efectos de esta eran triples de los solares. También matizó la información sobre el elipsoide oceánico “el vértice de este elipsoide no se dirige puntualmente hacia el Sol o la Luna, porque se ha observado que la marea no se verifica hasta 2 ½ horas después que los luminare han pasado por el meridiano en las mareas libres”. Su referencia a las mareas vivas y muertas ya nos debe resultar conocida

“en las sicigias, esto es en los novilunios y plenilunios, el esferoide ácuero que causa la atracción del Sol y el que causa la fuerza de la Luna, se dirigen hacia un mismo lado; por este motivo la prolongación del esferoide es igual a la suma de las prolongaciones que el Sol y la Luna pueden causar separadamente. Pero en las cuadraturas los ejes de estos dos esferoides son perpendiculares entre sí, y el eje mayor del esferoide solar aumenta el eje menor del esferoide lunar. Por consiguiente las mareas de las sicigias son la suma de los efectos del Sol y de la Luna, siendo así que las mareas de las

cuadraturas son su diferencia. Luego las alturas de las mareas pueden darnos a conocer la razón entre la fuerza del Sol y de la Luna”.

Bails amplió sus consideraciones hasta el extremo de fijar la regla que permitía calcular la altura de la marea en un lugar cualquiera y a una hora dada. Para ello fijaría en primer lugar la posición del Sol y de la Luna, evaluando sus distancias respectivas a la Tierra; en segundo lugar hallaría sus declinaciones y obtendría sus alturas sobre el horizonte del lugar elegido:

“cuando esta altura calculada fuese cero, será marea baja en aquel lugar, porque el vértice del esferoide estará en el horizonte. En los demás casos, el cuadrado del seno de dicha altura del vértice del esferoide ácueo, multiplicada por el efecto máximo de la Luna a la distancia dada, dará la altura de la marea, o la diferencia entre la más baja marea lunar y la que se verifica en el instante dado; se hará el mismo cálculo para el Sol y se sumarán una con otra las dos alturas para sacar la marea total”.

El último capítulo de estas lecciones lo dedicó Benito Bails a completar la información que había proporcionado sobre las coordenadas geográficas en sus Elementos de Astronomía, ya que de su correcta determinación dependería la fiabilidad de la representación territorial: “para formar una pintura cabal de nuestro globo, es preciso colocar en el mapa los diferentes puntos de la Tierra con la misma situación unos respecto a otros que tienen en la superficie de la Tierra. Esto se consigue determinando la su latitud y longitud, pues un lugar cualquiera está en la intersección del paralelo con el meridiano que le corresponde”. No obstante, esa información complementaria se refirió solamente a la longitud, como reconoció indirectamente el propio autor: “como la determinación de la latitud tiene poco que hacer, y hemos dicho cuanto ocurre acerca de esto, nos detendremos en declarar con individualidad las operaciones por cuyo medio se averigua la diferencia de los meridianos o de longitud entre los diferentes puntos de la Tierra”. Bails dividió su exposición en dos apartados, en el primero se limitó a los puntos situados en tierra firme y en el otro trató de explicar cómo se podían calcular las longitudes en el mar.

Aunque se creyera a mediados del siglo XVIII que ya se había resuelto definitivamente el secular problema de la longitud, todavía tuvieron que

pasar cien años para que Samuel Morse²⁵² propiciara la solución definitiva al haber logrado el transporte del tiempo, en el sentido de que en un lugar dado se pudiera conocer la hora de otro, para un mismo instante y de forma inmediata. La creencia se apoyaba en que, por aquel entonces, se disponía de una serie de procedimientos con los que determinar la longitud de manera relativamente fiable, tanto en el mar como en tierra firme. Los métodos astronómicos para calcular la diferencia de longitudes se podrían clasificar en las dos clases que se indican a continuación: aquellos procedimientos que requerían una reducción previa al centro de la Tierra, y los que no necesitarían reducción paraláctica. Dentro de la primera se incluirían: 1) las distancias de la Luna al Sol, a los planetas y a las estrellas fijas, 2) los eclipses de Sol y las ocultaciones de las estrellas y de los planetas por la Luna, 3) los tránsitos de los planetas inferiores por el disco solar, 4) las ascensiones rectas y los ángulos horarios de la Luna y 5) las alturas de la Luna. Los métodos incluidos en la segunda clase serían: I) los eclipses de Luna y II) los satélites de Júpiter.

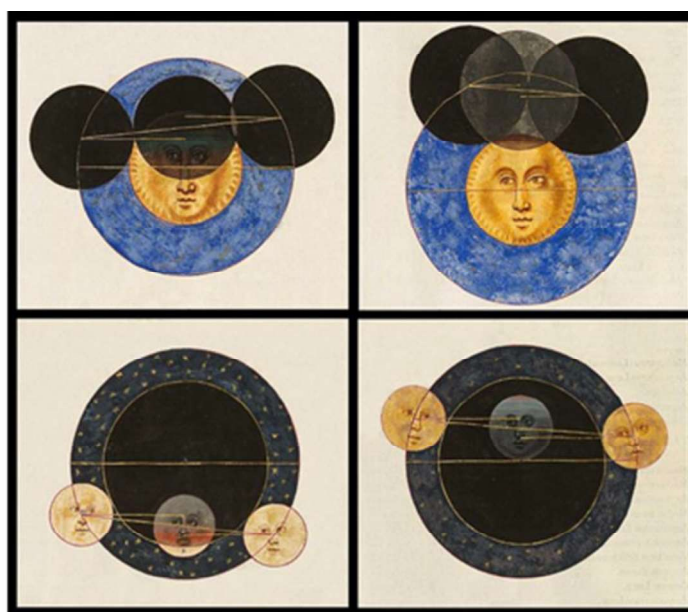


Ilustración de la obra: Eclipses luminarium summa fide et accurata diligentia supputatae, ac figuris coloribusque suis artificiose depictae, quarum rationes ab anno domini 1554. usque in annum domini 1600. se extendunt et ad meridianum Viennae Austriae referuntur. Su autor fue el astrónomo alemán Cyprian von Leowitz.

²⁵² Remito al artículo titulado *Aproximación cronológica al problema de la longitud: de Hiparco a Morse* (Topografía y Cartografía.2009), en él traté de resumir los principales hitos que fueron jalonando el problema de echar el punto, como se conoció en una época a la dificultad de hallar la longitud geográfica del mismo. La trascendencia del problema de la longitud va más allá del ámbito exclusivo de la astronomía geodésica, baste decir que su inadecuada evaluación fue uno de los factores de más peso para que se descubriese el nuevo mundo.

Mención aparte merece la solución propuesta por John Harrison para el cálculo de la longitud en el mar, la cual se basaba en el empleo de su cronómetro portátil H 4, anunciado en el año 1755 y completado cuatro años después. El relojero comunicó su invento a los diferentes gobiernos europeos, en los que se valoraron muy positivamente las innovaciones introducidas por el mismo²⁵³. Una vez recibidos en España, su Ministro de Marina e Indias, Julián de Arriaga, solicitó un informe a Jorge Juan²⁵⁴, entendiendo que él era la persona con mayores conocimientos al respecto; su respuesta fue: “Parecer de Don Jorge Juan sobre el reloj o cronómetro inventado por Juan Harrison, dirigido al Ministerio de Marina en 12 de abril de 1765 en satisfacción a Real orden de 2 de dicho mes”. De entre todos sus comentarios me permito rescatar el siguiente: “...es mi parecer que Harrison ha hallado la longitud aún a mayor exactitud de cuanto hasta ahora se ha podido imaginar, siendo acreedor a los premios que han ofrecido sobre el asunto los Monarcas”²⁵⁵.

Con semejantes antecedentes sorprende que Bails se centrara únicamente para el caso terrestre, en las ocultaciones estelares: “no hay para esta determinación método más seguro que el de los eclipses de Sol o de las estrellas, solo tiene el inconveniente de que su práctica requiere cálculos muy prolijos...Este método es el más directo, el más sencillo y el más seguro, y pensamos que no se debe usar otro”. Al referirse después a la determinación de las longitudes en el mar²⁵⁶, pareció contradecirse al indicar lo siguiente: “Para saber qué hora es en el puerto, le basta al navegante con tener un reloj bastante bien arreglado, de modo que no varíe más de dos minutos en dos meses de navegación...Pero para saber en alta mar qué hora es en un puerto, no son esencialmente necesarios esos relojes marinos; se puede hallar con observar los eclipses y en particular la situación de la Luna”.

²⁵³ El reloj de Harrison fue probado con éxito en dos travesías: Jamaica (1761-1762) y Barbados (1764), comprobándose fehacientemente que los errores que presentaba eran despreciables en relación con las tolerancias fijadas en el *Decreto de la Longitud* (*Longitude Act* del día 8 de julio de 1714); de ahí que su constructor recibiera la mayor parte de las recompensas económicas fijadas en el mismo.

²⁵⁴ El marino español creía que el invento de Harrison “no discrepaba del movimiento del Sol ni un minuto en muchos meses”.

²⁵⁵ Remito al artículo *Las medidas de la longitud realizadas por Jorge Juan y Antonio de Ulloa*. Revista de Historia Naval (Año XXXII.2014.Núm.124).

²⁵⁶ Con toda razón comentaba Bails que el problema se limitaba a saber qué hora era en la embarcación y cual era en el lugar de que zarpó.

Sin embargo no tardó en decantarse en favor del procedimiento de las distancias lunares:

“...es más generalmente practicado el método de las distancias de la Luna al Sol o a una estrella. A este método le asiste la circunstancia de que se puede practicar con una sola observación de distancia, no supone que se conozca la altura con suma precisión, pende muy poco de la declinación de la Luna y de la altura del polo, no pide que sea muy despejado y sin nube alguna el horizonte, no supone cálculos tan prolijos como los de la ascensión recta de la Luna; finalmente la reducción de la distancia aparente a distancia verdadera, atendiendo a los efectos de la refracción y de la paralaje, se puede ejecutar con la regla y el compás”. Antes de concluir su disertación sobre las longitudes, apuntó Bails un tercer procedimiento, el de las alturas de la Luna, susceptible de ser usado en aquellos casos en que no fuera posible medir la distancia entre la estrella y la Luna.

Bails resumió perfectamente la base del primer procedimiento a que hizo referencia: “cuando se ha observado el principio y fin de un eclipse de Sol, la inmersión y emersión de una estrella que la Luna oculta, o la de un planeta, se debe inferir el tiempo de la conjunción verdadera, y en conociendo el tiempo de la misma conjunción para cada uno de los dos países, la diferencia de los tiempos es con evidencia la de los meridianos”. Cuando se calculaban las longitudes terrestres a partir de las observaciones de las ocultaciones de las estrellas o de los eclipses de Sol, se trataba de obtener la posición geocéntrica de la Luna con relación al astro eclipsado, pudiéndose apoyar en cualquiera de las coordenadas astronómicas para conseguir el fin deseado. Entre todos los métodos posibles destacó el empleado por el astrónomo A. Cagnoli, que refirió la posición de la Luna y la de la estrella al plano del horizonte, para así calcular su distancia aparente vista desde la superficie de la Tierra²⁵⁷.

Sin embargo la proliferación de procedimientos llevó a la Real Academia de Ciencias de Copenhague a convocar, en el año 1788, el concurso siguiente: *Desideratur methodus, hucusque cognitio expeditior et facillior, longitudes geographicas ex observatis eclipsibus solis et fixarum a luna occultationibus computandi*. El premio lo ganó precisamente la memoria

²⁵⁷ Este astrónomo italiano fue discípulo de Joseph-Jérôme de Lalande, director del Observatorio de París entre los años 1795 y 1801. Lalande ya había publicado (1763) en las Memorias de la Academia de Ciencias, su propio método para determinar con rigor las longitudes a partir de las observaciones de los eclipses de Sol.

presentada por el astrónomo italiano, titulada *Méthode pour calculer les longitudes géographiques d'après l'observation d'éclipses de soleil et d'occultations d'étoiles*, publicada en Verona (1789). También debe de reseñarse aquí la importancia que tuvo en su momento la contribución de Christian Ludwig Gersten, por haber sido el primero que, en 1753, propuso calcular los eclipses de Sol, y las ocultaciones estelares, empleando las ascensiones rectas y las declinaciones de las estrellas. Los detalles de su método los incluyó en la publicación *Methodus nova calculi eclipsium terrae specialis, vel quoruncunque occursuum lunae cum stellis tam errantibus quam inerrantibus*; sus principios eran casi idénticos al del método de Cagnoli, aunque resultase mucho más expeditivo.

Una de las observaciones más señaladas en la historia de la astronomía fue la de la ocultación de la estrella Antares²⁵⁸ por la Luna, el día 6 de abril de 1749, desde los observatorios de Berlín y París. La efectuada en el primero corrió a cargo de Augustin Nathanael Grischow, debiéndose la del segundo a J.J. Lalande. Los dos astrónomos calcularon por separado la diferencia de longitudes entre las dos ciudades, $44^m 4^s$ como diferencia de las horas de las respectivas conjunciones: Berlín ($15^h 5^m 55^s$) y París ($14^h 21^m 51^s$). Bails dio todos los detalles de tan singulares observaciones, así como de los cálculos correspondientes, concluyendo su explicación con unas palabras que permiten dudar de la bondad del método:

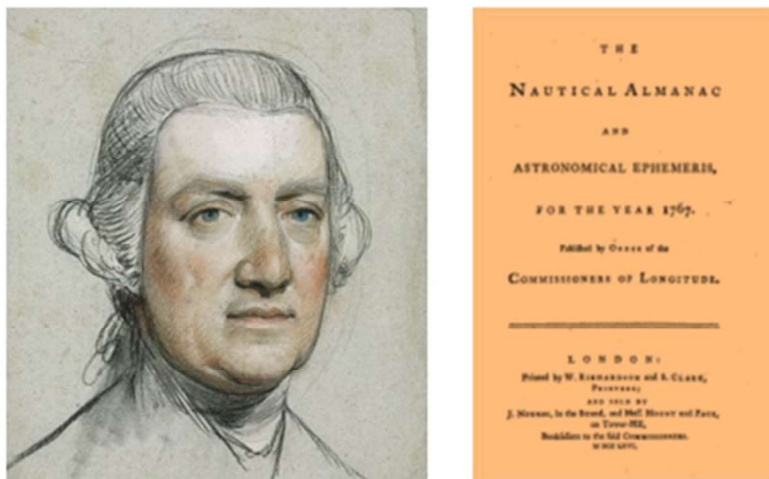
“cuando se ha visto un planeta o una estrella por detrás de la Luna, y se sabe a qué distancia del centro de la Luna ha de pasar, se concibe una línea que atraviesa las manchas de la Luna, y se procura reparar enfrente de qué manchas se debe hacer la emersión. Porque si el observador ignora donde está el punto de la emersión, en vano esperará ver la estrella en el instante de la emersión; y estas observaciones que son las más exactas de todas, son en estos casos las más defectuosas”.

Quizás fuese el astrónomo y cartógrafo renacentista Johannes Werner, en su traducción de la Geografía de Tolomeo, el primero en abordar la cuestión de las distancias lunares; aunque el método fuese desarrollado y perfeccionado por autores posteriores: Frisius, O. Finé, Apianus, Nonius y tantos otros. Sin embargo su aplicación resultaba harto complicada, por no decir imposible, como consecuencia de no poder calcular exactamente las

²⁵⁸ La estrella más brillante de la constelación Escorpio.

distancias y por la escasa fiabilidad de las tablas formadas tanto para la Luna como para las estrellas. No obstante, hubo que esperar a que Louis Feuillée iniciara formalmente la medida de las distancias de la Luna a las estrellas para deducir las longitudes. Justamente fue el 26 de junio de 1708 cuando observó la distancia entre el borde luminoso de la Luna y la estrella Espiga, coligiendo, con ayuda de las tablas de Cassini, que la posición del barco, en que navegaba, coincidía con la marcada por la estima dentro de un margen de 48 minutos de arco.

Sin embargo, los marinos fueron tan reacios al empleo de las distancias lunares, que La Caille, se vio obligado a recomendarlo de nuevo en 1759. Por esas mismas fechas, Mayer envió al consejo evaluador británico sus tablas de la Luna, construidas de acuerdo con la teoría de Newton, las cuales, según él, unidas a las distancias lunares, valían para localizar la posición de un barco con una exactitud mayor que la que se podía lograr con las tablas que se venían empleando. En el año 1767 se editó por primera vez el *Nautical Almanac*, con la evaluación de las distancias lunares para el Observatorio de Greenwich, siendo aceptadas siete años después por Lalande, e incluidas en la publicación *Connaissance des Temps*. A partir de entonces fue adoptado generalmente el empleo del método de las distancias lunares por franceses e ingleses; Borda y Cook, entre otros, fueron los principales usuarios, sin embargo, la metodología no se extendió a otros países.



El astrónomo real del Observatorio de Greenwich Nevil Maskeline, principal responsable del Nautical Almanac, cuya primera portada se presenta también en esta imagen. Las tablas de esta obra facilitaron sobremanera el cálculo de la diferencia de longitudes por el método de las distancias lunares.

Delambre proporcionó la solución analítica al hallar la distancia pretendida, mediante la fórmula trigonométrica siguiente:

$$\cos D = [2 \cos (S/2) \cos (S/2 - d) \cos H_L \cos H_E / \cos h_L \cos h_E] - \cos (H_A + H_B),$$

(h_L, h_E) y (H_L, H_E) son respectivamente las alturas aparentes y verdaderas de la Luna y de la estrella a la que se mide su distancia; d es el valor aparente de esta última y D el verdadero, finalmente S es la suma $h_L + h_E + d$. No obstante, tuvo que ser transformada para que interviniera la paralaje lunar y la forma elipsoidal de la Tierra, pues esta última afectaba al acimut de la Luna y a su propia paralaje. Pero el achatamiento polar modificaba también el valor teórico de la refracción y por tanto las alturas de las estrellas a las que se refieren las distancias; si bien sus efectos, en este último caso, los consideró despreciables y solo tuvo en cuenta los asociados a la paralaje. Para facilitar el cálculo de las distancias lunares aparecieron numerosas publicaciones, entre las que destacaron las de Maskelyne, Euler, Borda y el propio Delambre, incluyendo todas ellas fórmulas y tablas que agilizaban el mismo.

No obstante, merecen ser subrayadas las que formó el sabio marino español José de Mendoza Ríos, las cuales fueron editadas a cargo del almirantazgo inglés; las llamadas Tablas de Mendoza se publicaron en el año 1801 y fueron dedicadas también al astrónomo real Maskelyne, para el que tuvo el autor las mejores palabras²⁵⁹. La observación de las distancias de la Luna a las estrellas era muy segura para los navegantes, ofreciéndole además una ventaja que no se presentaba cuando se medían las de la Luna al Sol: la compensación de los errores instrumentales del sextante. La explicación era obvia: si en un mismo día se comparaban las observaciones de la Luna con las de las estrellas orientales y occidentales, casi todos los errores del sextante resultarían eliminados. Apoyándose precisamente en la utilidad de ese método para la navegación, insistía Mendoza en la necesidad de perfeccionar las tablas que el mismo había confeccionado.

Bails concretaba, en su explicación del método, el procedimiento a seguir para obtener una fórmula semejante a la anterior: “cuando se quiere calcular la distancia de la Luna a una estrella, se busca en las tablas de la

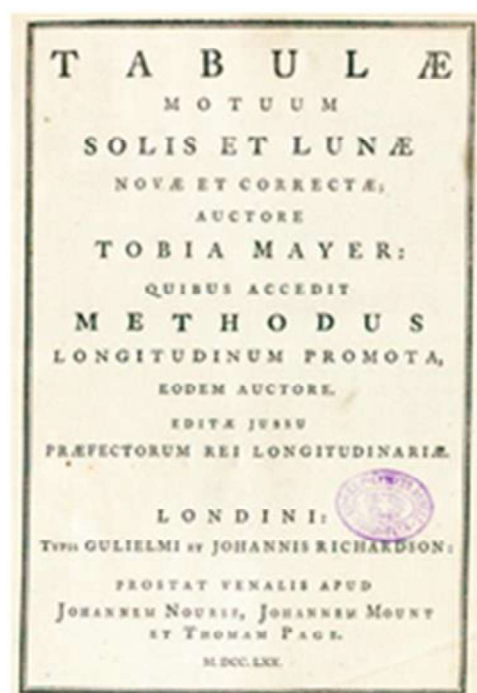
²⁵⁹ *To reverend Nevil Maskelyne, ..., whose ingenious labours have greatly advanced the Science of Astronomy, and whose indefatigable exertions, both his public capacity and private studies have contributed in a signal manner to the improvement of navigation, this work is with all deference, dedicated, by his most obliged friend, and, obedient, humble servant, Joseph de Mendoza Ríos.*

Luna su longitud para el tiempo dado, se toma en un catálogo la de la estrella, se buscan también las latitudes, y esto da la distancia al polo, y se forma un triángulo en el polo de la eclíptica, en la estrella y en la Luna”. Añadía también que a lo largo del cálculo había que tener en cuenta el diámetro iluminado de la Luna, para restar su mitad de la distancia calculada, cuando la Luna es creciente y sumarla cuando fuese menguante. Como en el procedimiento anterior, incluyó el correspondiente ejemplo: “supongamos que el día 26 de Mayo de 1754 un observador se hallase a $35^{\circ} 28'$ de latitud meridional, y observase a $8^h 45^m 20^s$ de tiempo verdadero la distancia de Régulo al limbo iluminado de la Luna de $24^{\circ} 56'$; la altura de la Luna reducida al mismo instante, y rebajando de ella la depresión del horizonte, sería con corta diferencia de unos $5^{\circ} 53'$, y la de la estrella $24^{\circ} 55''$. Después de efectuar las sustituciones correspondientes y de corregir los resultados por los efectos de la paralaje llegó a que la verdadera distancia de la Luna a la estrella sería de $24^{\circ} 16' 20''$, de manera que la diferencia entre las distancias observada y corregida sería de $39' 40''$.

El método de las alturas lunares lo recomendó Bails para aquellos casos en que no fuera posible aplicar el anterior. La práctica observacional exigía los ajustes previos para convertir la altura observada del limbo de la Luna en la altura verdadera de la misma, a saber: “las cuatro correcciones que penden de la altura del ojo respecto del mar, de la refracción, de la paralaje y del semidiámetro de la Luna”. El resultado final se conseguía tras seguir un proceso de aproximaciones sucesivas, como indicaba Bails: “siempre se conoce, con diferencia de media hora, la longitud del lugar donde se hace la observación; por consiguiente se puede saber qué hora es en París en el instante de la observación, y se puede calcular por las tablas para aquel instante, la declinación de la Luna, y por lo mismo su distancia al polo”.

Suponiendo que es posible saber el valor de la latitud del lugar y que se hubiera medido la altura de la Luna, siempre se podría resolver el triángulo de posición correspondiente para determinar el ángulo horario. Seguidamente se debería obtener la hora en París a la que presentaría la Luna ese mismo ángulo horario, de manera que la diferencia de longitudes pretendida sería la existente entre las dos horas locales. El proceso se iniciaba de nuevo partiendo del valor obtenido para la longitud del lugar, “si la diferencia fuese la misma que se tomó en este segundo supuesto, quedará abonado; pero si hubiere todavía alguna diferencia en el resultado,

se apuntará este error debajo del primer supuesto, se tomará su suma o su diferencia, según fueren de una misma o de distintas denominaciones, y se hará esta proporción: *La suma de los errores es al error menor, como este es a la corrección que se debe hacer a la diferencia de los meridianos hallada por el supuesto que ha dado el menor error*²⁶⁰.



Dos de las principales tablas astronómicas empleadas durante el siglo XVIII. La primera fue confeccionada por Jacques Cassini (1740) y la segunda por Tobias Mayer (1760), esta última fue prologada por el director del Observatorio de Greenwich, Nevil Maskelyne.

²⁶⁰ Bails aplicó el procedimiento a un ejemplo, con el que halló la longitud de una embarcación situada al Oeste de París. En el primer intento partió de una longitud de $2^{\text{h}} 0^{\text{m}} 0^{\text{s}}$, y obtuvo un error de $28^{\text{m}} 23^{\text{s}}$, en el segundo supuso que la longitud sería de $2^{\text{h}} 28^{\text{m}} 23^{\text{s}}$, hallando al final otro error de $14^{\text{m}} 58^{\text{s}}$; deduciendo finalmente una longitud de $3^{\text{h}} 0^{\text{m}} 3''$ al Oeste de París.

4. CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA



Benito Bails pertenece al grupo selecto, y minoritario, de españoles que fue pionero en el tratamiento de la geografía matemática, entendida en su tiempo como una aplicación geométrica, más o menos directa, que permitía obtener una representación plana de la imagen esférica de la Tierra. Aunque es muy probable que los primeros antecedentes hubiese que buscarlos entre los astrónomos andalusíes, estudiosos críticos de las obras tolemaicas, no se conserva prueba documental que avale tal suposición. Hubo que esperar a finales del siglo XV para que Elio Antonio de Nebrija publicase su *Tratado de Cosmografía*²⁶¹, un texto breve pero de singular trascendencia, que parecía orientado a la docencia y estaba estructurado en diez capítulos, dedicando el séptimo a la representación de la Tierra según Tolomeo.

Bails debió sentir interés por la cartografía coincidiendo con su estancia en París, teniendo en cuenta su formación y el espectacular desarrollo de la misma, al amparo permanente de la Academia de las Ciencias. A su llegada a Madrid, no tardaría en comprobar que sus inquietudes eran compartidas y superadas por Jorge Juan, pues ya había presentado este, junto a su compañero Antonio de Ulloa, varias iniciativas al gobierno de la Nación para que se llevasen a cabo en España trabajos similares a los que con tanto éxito se venían efectuando en Francia²⁶². Bails plasmó parcialmente sus conocimientos cartográficos, años después, en el volumen octavo de sus *Elementos de Matemática* (1775), concretamente en el capítulo que tituló *De los Mapas Geográficos*.

Su lección de cartografía comenzaba con los sistemas perspectivos²⁶³, aclarando como se proyectaba la esfera terrestre sobre el plano. Elegido un cierto punto de vista se configuraba el haz de rectas formado por él y todos los puntos del globo terráqueo que se pretendieran representar en el mapa. Después se elegiría el plano de la proyección, de manera que sus intersecciones con el haz anterior serían las imágenes cartográficas de los

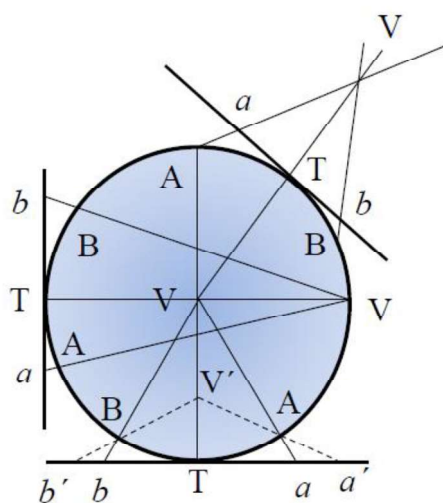
²⁶¹ *Aelii Nebrissensis Grammatici in Cosmographie libros introductorium* ... (1499). Más información sobre las contribuciones de Nebrija, en esta área de conocimiento, pueden encontrarse en el trabajo: *Astronomía, Geodesia y Metrología*, en la obra de Nebrija (TOPCART 2000. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía).

²⁶² El lector interesado en los proyectos cartográficos de ambos marinos, podría consultarlos en el librito *Jorge Juan y sus proyectos para un Mapa de España* (Universidad de Granada & Fundación Jorge Juan. 2005).

²⁶³ En un principio parecía dar a entender que se trataba de los únicos posibles: "...en la construcción de los mapas se deben guardar las leyes de la perspectiva, cuyo punto no deja de ser algo dificultoso por razón de la redondez de la Tierra".

puntos terrestres previamente considerados. La posición relativa de ese plano, el plano del mapa en definitiva, la del vértice del haz y la de su perpendicular a dicho plano, serían por tanto los elementos fundamentales que presidirían la forma y la disposición de los puntos y líneas maestras del mapa²⁶⁴. Bails daba detalles mucho más concretos del procedimiento a seguir:

“cuando se quiere, pues, representar la superficie de la Tierra, y todos sus puntos y círculos, se supone colocado el ojo en algún punto fuera de la Tierra, y un plano transparente colocado como se quiera entre la Tierra y el ojo, bien que lo mejor es suponerle colocado perpendicularmente a la línea que va desde el centro de la Tierra al ojo, a fin de que salga más regular la figura. Después se imaginarán líneas tiradas desde todos los puntos de la Tierra o de sus círculos, cuales son el ecuador, los trópicos, o desde todas las ciudades cuyas líneas atraviesan el expresado plano; y los diferentes puntos donde estas líneas cortaren el plano serán la representación de los puntos correspondientes de la Tierra”.



Diferentes modos de proyectar la esfera, sobre planos tangentes a la misma, desde variados puntos de vista.

Como parece evidente, al sistema descrito ha de imponérsele la condición de que la correspondencia entre los puntos de la Tierra y sus homólogos del mapa sea biunívoca, tal como recordaba Bails: “pero como la Tierra es

²⁶⁴ Comentaba Bails lo siguiente: “Como podemos suponer el ojo colocado en muchos sitios diferentes unos de otros, también puede suceder que los rayos que desde los objetos vinieren al ojo atraviesen el plano en muchos puntos diferentes; siguiéndose de aquí que la apariencia de la Tierra y sus círculos no será la misma para un ojo colocado en su eje, que para un ojo en otro lugar entre el ecuador y el polo, y que parecerán de distinta figura los círculos de la Tierra”.

redonda, no se puede representar en un plano toda su superficie, porque entonces dos sitios de la Tierra se confundirían en un solo punto del plano, y este es el motivo de no pintarse más que la mitad en su plano y la otra mitad en otro plano”. En otras palabras, la imagen de la Tierra no se puede obtener mediante este sistema de forma global, puesto que desde un cierto punto de vista el haz de rectas se constituiría necesariamente con puntos de un solo hemisferio, de ahí las clásicas imágenes de los mapas del mundo con dos círculos, uno para cada mitad de la Tierra.

Asimismo resulta obvio que para una misma posición del plano de proyección, cambiaría el tamaño del mapa en función de la distancia a que se encontrase el punto de vista de la superficie terrestre; en la figura anterior resultaría que el valor del segmento *ab* disminuiría a medida que lo hiciera el determinado por el punto de tangencia y el punto de vista considerado. En cuanto al aspecto del mapa, no resultaría alterado aunque variase la posición del vértice del haz, siempre que su desplazamiento se produjera en sentido radial. Todo lo contrario ocurriría, de acuerdo con Bails, si el plano de la proyección no conservase su posición primitiva: “o se saliere el ojo de la línea que pasa por el centro de la Tierra, entonces la imagen no será semejante, y los rayos que de ella vienen llegarán al ojo después de atravesar el plano en puntos entre cuyas distancias respectivas no habrá la misma proporción que antes”.

De entre todas las posibles localizaciones del plano de proyección, eligió Bails aquella en la que fuese tangente a la Tierra, o paralelo al mismo: “de modo que toque la superficie en un punto tal que una línea que desde el ojo llegue a él, sea perpendicular a la superficie y se dirija al centro de la Tierra; y por lo que toca al tamaño de la figura, se supone el ojo más o menos apartado de la Tierra”. No obstante, al situar el punto de vista, solamente consideró los tres supuestos más convencionales, es decir: a) tan alejado de la Tierra que todas las rectas del haz pudiesen considerarse paralelas y perpendiculares al plano del mapa (proyección ortográfica²⁶⁵), b) sobre la superficie terrestre y diametralmente opuesto al punto de tangencia (proyección estereográfica) y c) el centro de la Tierra (proyección gnomónica).

²⁶⁵ Bails despachó la proyección ortográfica indicando que era la más sencilla de todos los sistemas cartográficos, aunque señalaba, como contrapartida, la imposibilidad de emplearla cuando la superficie de la región fuese considerable; de ahí que solamente la recomendara para las que estuviesen situadas en las zonas circumpolares o para países de poca extensión.

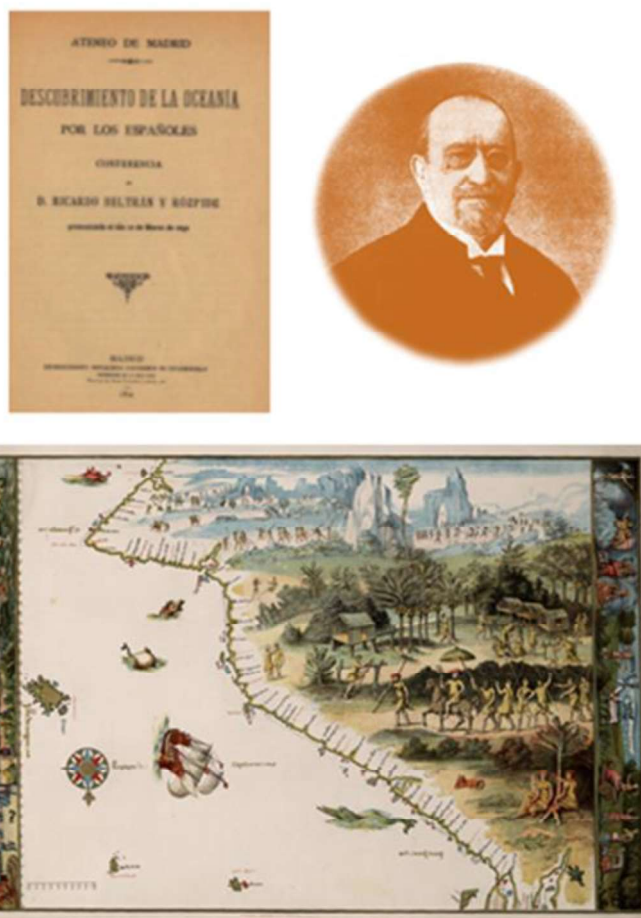
De nuevo recordaba Bails que la confección de mapas obedecía a las reglas de la perspectiva, de manera que se cumpliesen los tres objetivos siguientes: 1) todos los puntos se tendrían que fijar en relación con las imágenes de los meridianos y de los paralelos, 2) las representaciones de los países deberían guardar entre sí la misma proporción que tenían sobre el globo terráqueo y 3) “los lugares han de estar en la misma situación y distancia unos de otros que en la superficie de la Tierra”. Bails era consciente de que las dos últimas eran de imposible cumplimiento, por el carácter sensiblemente esférico de la Tierra; he aquí sus propias palabras: “pero para que la segunda se verifique, es menester quebrantar algún tanto estas reglas...por lo que mira a la tercera condición, no se puede verificar en los grandes mapas, cuales son el de la Tierra, y de sus cuatro partes²⁶⁶”.

Aceptadas las inevitables deformaciones inherentes a cualquier representación cartográfica de la Tierra, por tratarse de una superficie no desarrollable, Bails planteaba la necesidad de reducirlas hasta alcanzar magnitudes tolerables, una vez analizado su origen:

“...de donde nace la extensión y figura de las partes de la Tierra están más o menos alteradas, según la diferente posición del ojo. Para enterarse de la causa de esa apariencia, y hasta qué punto se deba remediar este defecto, bueno será considerar el origen y formación de estas representaciones. Supondremos con esta mira que se haya de ejecutar la descripción del globo, y tomaremos, para que sirva de ejemplo un círculo particular,

²⁶⁶ Bails se pronunciaba así cuando aún no se había descubierto formalmente el quinto continente, si bien eran muy recientes las circunnavegaciones protagonizadas por los ingleses John Byron (abuelo del famoso poeta) y Samuel Wallis, y estaban efectuándose las exploraciones del capitán James Cook. Aunque no se pueda precisar a ciencia cierta quien descubrió la mítica *Terra Australis* prevista por los geógrafos griegos, si es incuestionable que los pioneros fueron marinos hispánicos. En lo que se refiere a los españoles, es de lectura obligada la conferencia que publicó en el Ateneo de Madrid el ilustre Secretario de la Real Sociedad Geográfica, Ricardo Beltrán y Rózpide, cuyo título fue suficientemente explícito *El descubrimiento de la Oceanía por los españoles*. En ella lamentaba que las gestas de nuestros marinos fuesen menos conocidas que las protagonizadas por los de otras nacionalidades: “como los supuestos descubrimientos de Tasman, Cook, Bougainville y otros navegantes extranjeros de los siglos XVII y XVIII..., por carecer de publicaciones en las que se glosaran los descubrimientos llevados a cabo por Los Cano, Loaisa, Saavedra, Mendaña, Quirós, Torres, “...es decir los verdaderos descubridores de la Oceanía”. Para Beltrán, los primeros marinos citados se limitaron a seguir los rumbos marcados por estos últimos. Otro de sus comentarios cobra actualidad: “Así se comprende que haya en nuestro país muchas personas para quienes la afirmación rotunda de que España ha descubierto la Oceanía, suene como cosa nueva o poco oída. Y sin embargo, este descubrimiento, en todo el valor que la palabra descubrir tiene, es más verdadero, en cuanto al hecho de realizarlo nosotros, que el descubrimiento de América, puesto que no fueron españoles, sino hombres del Norte, los primeros europeos que desembarcaron en tierra americana; y por el contrario, a las tierras y mares oceánicos nadie, desde Europa, llegó antes que los españoles”. En lo que se refiere a los portugueses, se puede consultar el librito publicado cuatro años después por Luis Vidart, titulado *El Descubrimiento de Oceanía por los portugueses, apuntes históricos*.

después que hubiéremos dado a conocer la proyección que sirve para los mapas”.



Portada de la conferencia Descubrimiento de la Oceanía por los españoles, pronunciada en el Ateneo de Madrid por Ricardo Beltrán Rózpide el 10 de mayo de 1892. Se presenta también el llamado primer mapa de Australia, incluido en el Atlas de Nicolas Vallard (1547); denominado así en recuerdo de su propietario. Realmente es copia (1856) de uno de los mapas confeccionados en la ciudad francesa de Dieppe por un cartógrafo portugués.

Bails era rotundo al afirmar que “la forma más acomodada para los mapas,..., particularmente para los Mapamundi, la que menos desfigura la forma natural de los continentes es la proyección *Estereográfica*, se supone que esté el ojo en la circunferencia misma del globo en la parte superior, y que está mirando la inferior refiriendo todos los puntos de este hemisferio al plano del círculo máximo perpendicular al diámetro en que está el ojo”.

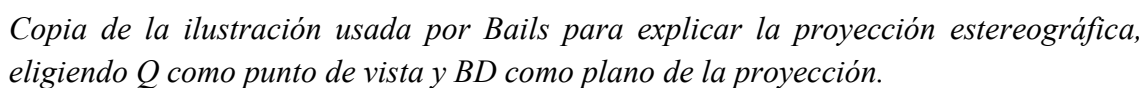
Para realizar la correspondiente explicación, eligió el caso particular en que el plano de proyección coincidía con el del ecuador, apoyándose en una figura idéntica a la que se presenta a continuación. Q sería el punto de

vista, BD el diámetro del círculo de la proyección, BFD el semicírculo que se proyectaría sobre el segmento anterior, añadiendo: “imaginemos rayos que desde el ojo Q van a los diferentes puntos de esta concavidad, y encontrarán el diámetro BD en otros tantos puntos que serán sus proyecciones”. El cálculo del valor del segmento CG, imagen del arco FR, lo basó en las conocidas relaciones entre los ángulos centrales e inscritos, deduciendo fácilmente que $CG = \text{tag}(\alpha/2)$, una vez tomado el radio CQ como unidad lineal, siendo α la colatitud del paralelo de diámetro HR.

Según Bails, la gran propiedad de la proyección estereográfica era que la imagen de los círculos contenidos en el globo, independientemente de su posición, también eran círculos en el mapa²⁶⁷. En la demostración usó el cono circunscrito a la esfera, a lo largo de la circunferencia que pensaba proyectar, pues el centro de la imagen de esta sería precisamente la proyección del vértice del cono sobre el plano del mapa. La conclusión fue por tanto que si la base del cono QFR era un círculo, la del otro cono QCO también sería circular, “bien que sea de diferente extensión. Si hiciéramos otras figuras semejantes con las mismas letras, echaríamos de ver, que el tamaño de FR y su situación, aún en el semicírculo superior BQD, no altera la verdad de la proposición”.

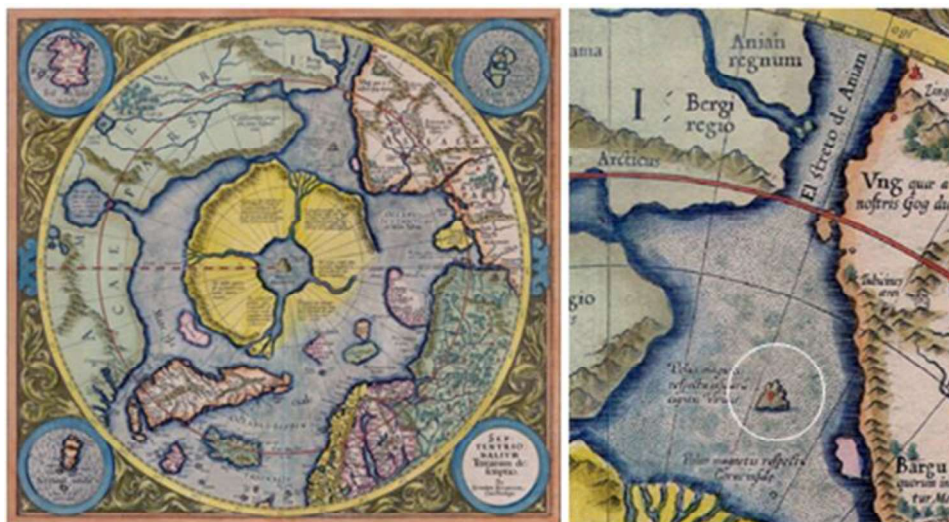
Bails explicó después como podrían obtenerse las proyecciones de los arcos de meridianos sobre el plano del mapa, una serie de rectas convergentes en el punto C, imagen del polo; tales rectas serían por tanto las intersecciones de los planos meridianos con el del ecuador, coincidente como ya se dijo con el plano de la proyección o del cuadro. En su afán didáctico, se fijó Bails en la semicircunferencia HRI, proyectada sobre el segmento SP, cuyo valor sería la suma de los dos siguientes: SC y CP. Ahora bien, el primero valdría $\text{tag}(\alpha/2)$, mientras que el segundo sería igual a la tangente de la mitad del arco $FI = 90^\circ + \varphi$, esto es $CP = \text{tag}(45^\circ + \varphi/2)$; a la vista de la figura es obvio que $SP = \text{ctag}(\varphi/2) + \text{tag}(45^\circ + \varphi/2)$. En lo referente a los paralelos, se proyectarían sobre el plano del ecuador como circunferencias, pudiéndose determinar fácilmente su diámetro, tal como demostró Bails. Si el

²⁶⁷ Aunque todavía no se conociera la propiedad cartográfica de la conformidad, como la definió C. F. Gauss casi un siglo después (1844), conviene recordar que la proyección estereográfica es la más antigua de las conformes. Esa propiedad, por la que se conservan los ángulos, entre dos curvas dadas, al pasar de la esfera a su imagen plana, es más general que la citada por Bails; de hecho también se puede caracterizar por su significado etimológico de conservar las formas: de manera que la representación cartográfica de una circunferencia de la Tierra también sería circunferencia en el mapa.



Bails intercaló en su exposición sobre las proyecciones perspectivas un desarrollo cónico, generalización de los anteriores, comentando que también era un sistema cartográfico usado por algunos geógrafos, cuando la región a representar tenía una extensión considerable, “30 o 40 grados...de

modo que los mapas son la resolución de un cono circunscrito a la esfera, que la tocará en la circunferencia del paralelo que ocupa el medio del mapa”. La particularidad más sobresaliente de estos antiguos sistemas²⁶⁸ es que las imágenes de los meridianos y de los paralelos son perpendiculares como en la esfera terrestre. Las primeras no son más que las generatrices del cono, una vez desarrollado, y la de las segundas arcos concéntricos trazados desde el vértice del mismo²⁶⁹.



Septentrionalium Terrarum descriptio (Amsterdam.1595), *mapa póstumo de G. Mercator*. A él se debió la primera representación aislada de esta parte de la Tierra. Son destacables las informaciones que aporta sobre dos leyendas: la del estrecho de Anián, que supuestamente separaba el continente asiático del americano, y la imagen del polo magnético, localizado en una isla; clara referencia a la mítica *Rupes Nigra* (Roca Negra) formada por roca imantada y supuesta próxima al Polo Norte.

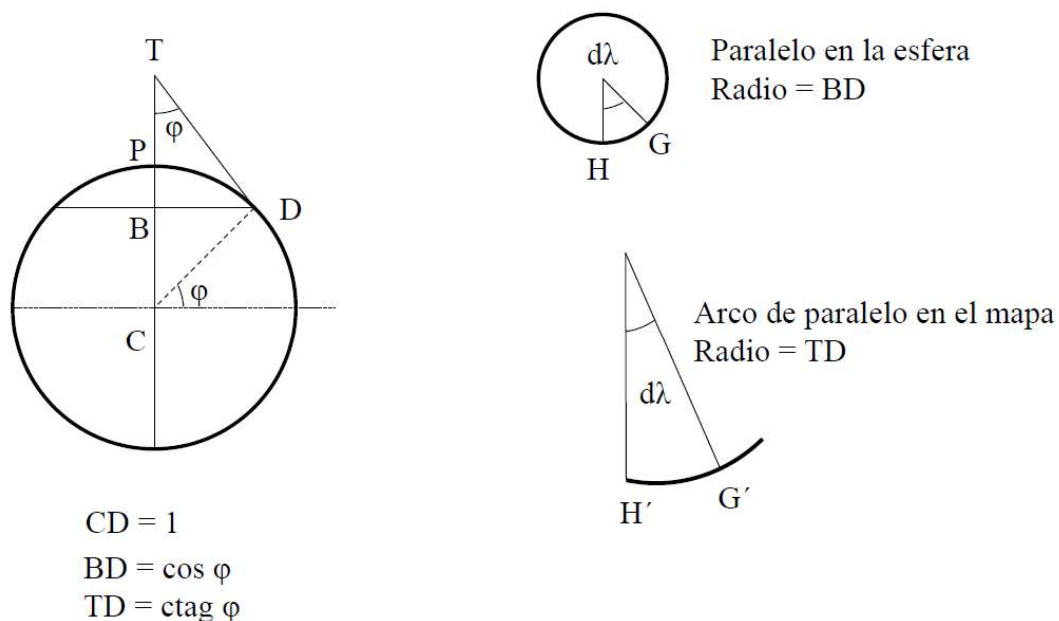
Bails solo refirió el caso particular del radio correspondiente al paralelo de tangencia, el cual coincidía con la cotangente de la latitud, como evidenciaba la figura con que acompañó su explicación y que se reproduce a continuación. También explicó Bails la relación entre el desarrollo de un arco de paralelo en el mapa y en la esfera, lo que en términos actuales se denomina escala local de la representación. En efecto, partiendo de que el citado desarrollo sería en los dos casos el producto del radio por la diferencia de longitudes, expresada en radianes, se verificarían las dos

²⁶⁸ Variantes de los mismos ya fueron utilizadas por Claudio Tolomeo.

²⁶⁹ Las generatrices son en este caso intersecciones de los planos meridianos con la superficie del cilindro. Los radios de los paralelos se calculan dependiendo de las propiedades que se le impongan al sistema cartográfico: conformidad o equivalencia (conservación de las superficies al transformar la esfera en el plano del mapa).

igualdades siguientes: esfera, $ds_p = R \cos \varphi d\lambda$, mapa, $ds'_p = R \text{ctag } \varphi$ es decir que $ds_p / \cos \varphi = ds'_p / \text{ctag } \varphi d\lambda \Rightarrow ds_p = ds'_p \text{sen } \varphi$.

Esa última relación la pretendía aclarar Bails añadiendo: “por consiguiente un grado o 60' del paralelo ocupará en el círculo del mapa, cuyo radio es TD, un arco igual a...60'sen lat. Esto es, 46' para 50° de latitud”. Seguidamente explicó como podrían dibujarse, punto a punto, las imágenes de los paralelos: “suele ofrecerse trazar este círculo sin conocer su centro”. Una vez dibujados los paralelos se subdividirían para unir después los puntos de igual longitud y obtener por lo tanto la representación de los meridianos.

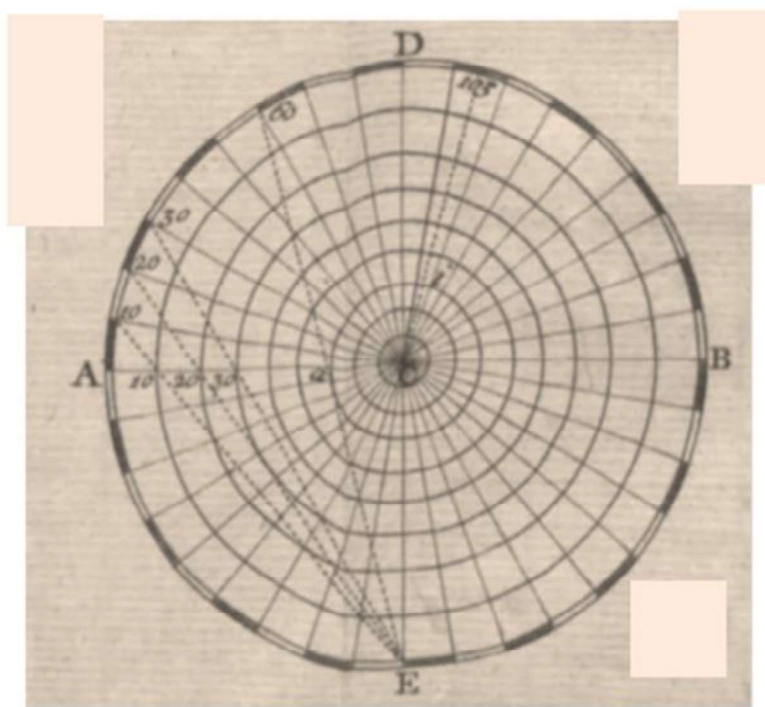


Copia de la ilustración de Bails para aclarar sus comentarios sobre el desarrollo cónico: BD es el radio del paralelo de tangencia, T es el vértice del cono y TD una de sus generatrices.

Expuestos esos principios cartográficos, creyó Bails que había llegado el momento de adentrarse en la construcción del mapa de cualquiera de los hemisferios de la Tierra. Dos fueron los sistemas que propuso: “I) *Método* que supone el ojo en el polo del hemisferio opuesto, ó distante del plano de proyección un semidiámetro terrestre, II) *Método* que supone el ojo colocado en el plano del ecuador, y distante el radio de la Tierra del plano de proyección”.

El primer sistema fue pues una proyección en la que el ecuador sería el plano del mapa. Las imágenes de los meridianos serían rectas que

convergerían en el centro de todas las circunferencias representantes de los paralelos. Bails recomendaba que se dibujase en principio la circunferencia que representaba el plano de la proyección. Aunque dijese que su radio (CA en la figura con que ilustró su discurso) podría ser “tomado en arbitrio”, es evidente que dependería ineludiblemente de la escala elegida para el dibujo. Esa circunferencia sería el límite exterior del campo del mapa, de ahí que indicase también la conveniencia de trazar otra muy próxima que la envolviera; seguidamente se dividiría la corona circular resultante en 36 partes de 10° , a modo de limbo circular identificado con las letras ADBE. Los dos meridianos principales, y mutuamente perpendiculares serían los diámetros AB y DE, tomando el primero como origen de las longitudes; la imagen de los meridianos resultantes coincidirían con los diferentes diámetros definidos por las divisiones perimetrales, ya citadas.



Modelo seguido por Bails para la construcción de un planisferio, de acuerdo con el primer método que propuso.

Para trazar las imágenes de los paralelos, se tenía que determinar previamente el valor del radio correspondiente. Bails recurrió para ello a un ingenioso artificio geométrico: “tírense con una regla desde el punto E a los grados del limbo del plano de proyección, las líneas ocultas E 10, E 20, E 30, &. y desde el punto C como centro, con los radios C 10, C 20, C 30,

& trácense círculos concéntricos que pasarán por cada diez grados de latitud”. Dibujada la retícula de los meridianos y paralelos, se procedería a la representación de los lugares, que deberían figurar en el mapa, como intersección de los que les correspondiera en función de su latitud y longitud. Bails explicó el procedimiento a seguir, con toda claridad: “cuéntense en el ecuador ADBE tantos grados, como coge la latitud dada, y tírese desde el punto E al número de grados dado, pongo por caso a 60° , con un lápiz la línea E 60; desde el centro C tírese otra línea C 105, si fuere 105° la longitud dada. Finalmente desde el punto C con el intervalo Ca córtese la C 105 en *i*; será *i* el sitio que corresponde al lugar propuesto”.

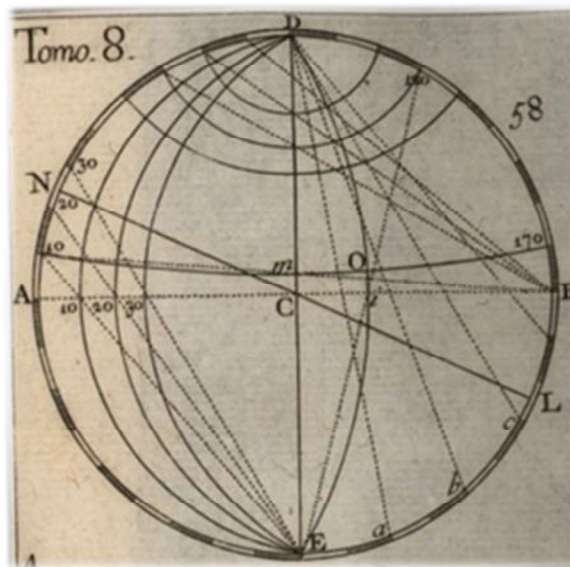
El enunciado del segundo método propuesto por Bails, permitía sospechar que iba a elegir la proyección gnomónica, en su versión meridiana, aunque la construcción del mapa demostró que optó por un sistema que recuerda a la proyección acimutal genérica con red de meridianos y paralelos equidistantes. El plano de la proyección, es decir el del mapa, representaría el primer meridiano: el círculo ADBE en la figura siguiente, centrado en el punto C y “con un radio arbitrario AC”; de nuevo ha de recordarse que su valor está indefectiblemente unido a la escala elegida para el dibujo²⁷⁰. Como en el caso previo, el círculo es el borde externo del mapa, recomendando Bails que se trazara otro muy próximo para formar una escala circular graduada en 36 partes de 10° cada una. A continuación se dibujaría la línea AB, imagen del ecuador, y la perpendicular a ella, ED, trazada por el centro C; esta recta *ed* sería la imagen del meridiano en que se encuentra el punto de vista: “el principio del ecuador estará en A, y los polos en E y D”.

La construcción de los meridianos no ofrecía dificultad alguna, de acuerdo con la descripción de Bails: “ desde el punto E tírense a cada diez grados...las rectas E 10, E 20, E 30, & y por los puntos de intersección de la recta AB, y por los polos E y D trácense los arcos D 10 E, D 20 E, D 30 E & y estos serán los meridianos”. No obstante, añadía que los respectivos centros de tales arcos se podrían hallar fácilmente si se dibujaban las rectas *Da*, *Db*, *Dc* etc, espaciadas 20° , ya que sus intersecciones con la imagen del ecuador serían justamente los centros buscados. Para dibujar las representaciones de los meridianos se trazarían desde B las rectas indicadas en la referida figura, espaciadas 10° , cuya

²⁷⁰ Bails aclaraba que el punto de vista se supondría localizado a 90° de distancia del círculo anterior.

intersección con el meridiano DE serían puntos de los paralelos correspondientes; puntos que se deberían unir a los situados sobre el limbo perimetral con igual latitud.

De forma semejante se podrían dibujar los dos círculos polares y los dos de los trópicos, “ y si se supone que la eclíptica corta al ecuador en el punto donde esta el ojo, el ojo estará en el plano de la eclíptica, y la representará la línea NL”. En cuanto a la localización de los puntos definidos por sus coordenadas geográficas, se efectuaría como intersección de los paralelos y meridianos respectivos. Así se explicaba Bails a este respecto: “cuéntese en el semicírculo ADB del primer meridiano la longitud A 120, y tírese la recta E 120, y por E, *i* y D el meridiano DiE. En el cuadrante AD cuéntese la latitud A 10, y tirando la recta B 10 por 10, *m* y 170 trácese el paralelo 10 *m* 170. El lugar propuesto estará en la sección común O”.



Modelo seguido por Bails para la construcción de un planisferio, de acuerdo con el segundo método que propuso. Imagen cedida por el Instituto y Real Observatorio de la Armada.

Sabiendo ya como se dibujaba un mapamundi, se centró Bails en la formación de otros más detallados: continentales y de países. Nada interesante aporta en ambos casos, salvo las representaciones de las Américas: septentrional y meridional, y de la Península Ibérica. Para dibujar el mapa continental trazó un eje longitudinal, AB, símbolo del meridiano principal, en cuyo plano suponía situado el punto de vista. La

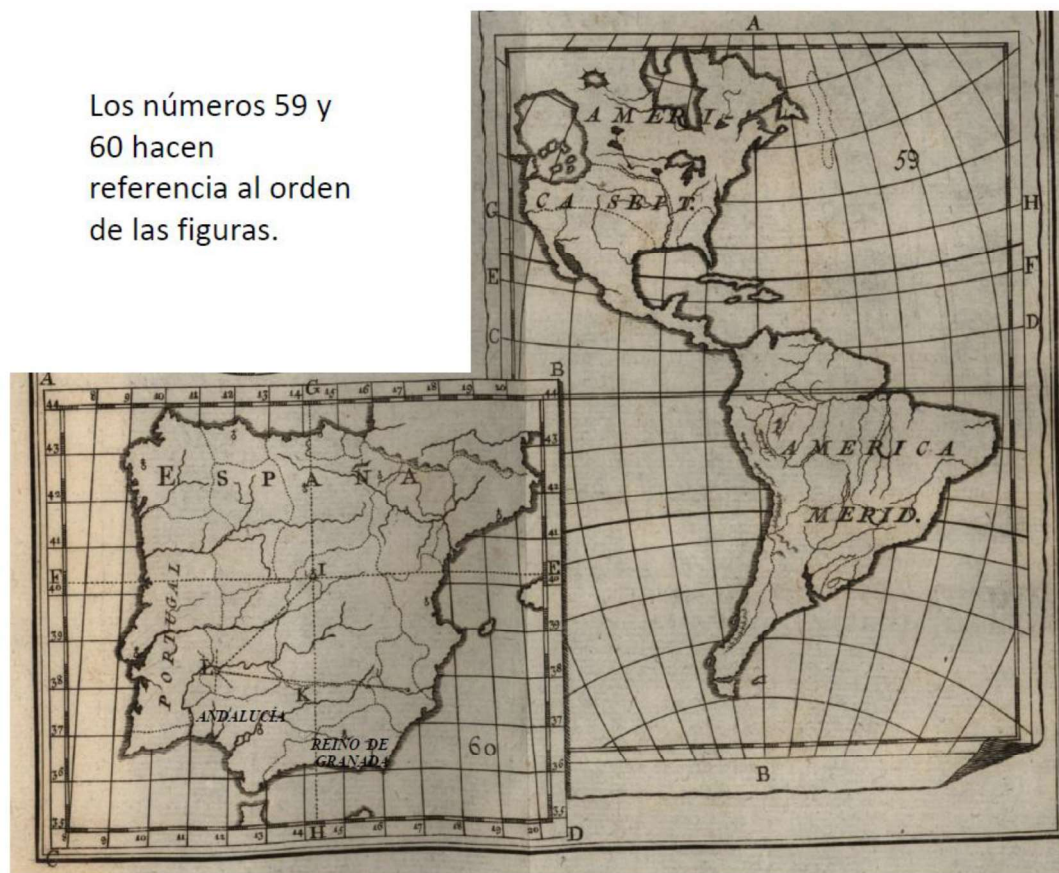
red de meridianos y de paralelos se configuró del modo siguiente: “a esta línea se trasladarán las distancias que en el mapamundi hay entre los paralelos, pero duplicándolas, triplicándolas, & conforme hubiere de ser el tamaño del mapa. Por cada grado de latitud se trazarán los paralelos CD, EF, GH, & con radios duplos, triplos, & de los radios con los cuales están trazados en el mapa universal”. Sobre dichos paralelos se marcarían después las diferentes longitudes y se unirían los puntos así determinados, para obtener las imágenes de los respectivos meridianos. Los diferentes lugares se representarían de igual manera que en el caso general, ya citado.

Aunque Bails ilustrase sus comentarios siguientes con un mapa de la Península Ibérica, no la mencionó como tal en su explicación: “para formar el mapa de un país en particular, se construirá un paralelogramo rectángulo del tamaño del mapa. Se dividirán las latitudes AC y BD en tantas partes iguales cuantos grados cogiese la latitud del país propuesto, y se tirarán paralelas a las líneas AB y CD”. La inconsistencia del procedimiento la trató de justificar al comentar que todos los grados del meridiano eran iguales entre sí y que “la latitud del país se puede tomar por una línea recta, por ser un arco de pocos grados. Por igual razón los paralelos se pueden tirar como líneas rectas”.

Para representar los meridianos si tuvo en cuenta que los grados de longitud eran menores, en su desarrollo, que los de latitud. Teniéndolo en cuenta, se dividirían las rectas AB y CD en “los grados de longitud que cogiere el país...por los grados correspondientes de longitud tírense rectas que...serán arcos del meridiano”. La imagen de un punto cualquiera se determinaría como intersección del meridiano y del paralelo correspondiente: “háganse después AG y CH iguales a la longitud del punto dado, y tírese la recta oculta GH. El punto de intersección I de estas dos rectas será el lugar propuesto”.

Bails no tuvo en cuenta las deformaciones inducidas por la curvatura terrestre al plantear, y resolver, sobre el mapa el siguiente ejercicio geométrico, con el que concluiría su explicación: “una vez que se sepa a qué distancia de dos puntos K, I señalados en el mapa está otro lugar L, y a qué lado cae, se determinará el lugar que le corresponde, tirando desde I y K hacia L dos rectas que se cortarán en L, determinando también cuantas

leguas se señalan a cada grado. Últimamente añádasele al mapa el pitipíe²⁷¹ o escala correspondiente”.



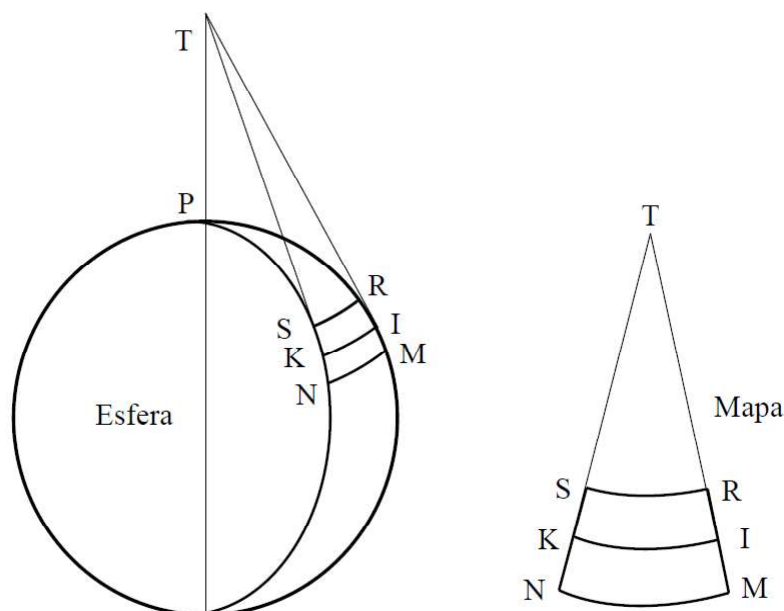
Ilustraciones empleadas por Benito Bails en sus explicaciones cartográficas. En el mapa de la Península Ibérica se observa que las longitudes están calculadas por defecto, se aprecia también el esquema de su hidrografía y la división administrativa de los antiguos reinos (con líneas de puntos). Se han superpuesto los nombres de Andalucía y Reino de Granada. La imagen ha sido cedida por el Instituto y Real Observatorio de la Armada.

En el siguiente supuesto mostró Bails una consistencia geométrica digna de ser subrayada. Se trataba de hacer el mapa de una región de extensión menor, que permitía suponer coincidentes la superficie esférica correspondiente y la del cono circunscrito a lo largo del paralelo trazado en su punto medio. Los límites de la zona serían arcos de meridiano y de paralelo, de manera que quedarían representados en el mapa por líneas rectas y arcos de circunferencia con radio igual al segmento definido por el vértice y el punto en cuestión; como en los casos previos.

²⁷¹ Del francés *petit pied*, es una denominación para la escala gráfica que figura en los mapas, la cual recuerda la tradición impuesta por el pie como medida antropométrica.

Bails describió, pormenorizadamente, las figuras en que se apoyó:

“por ser de pocos grados los arcos MR y NS, se confunden sensiblemente con las tangentes IT, KT, y el espacio MRSN se puede considerar como una porción de la superficie de un cono recto cuyo vértice está en T; por consiguiente para representar esta espacio resuelto en un plano, se traza con un radio igual a TI un arco KI de tantos grados cuantos coge la diferencia de longitud que hay entre los dos meridianos y después de tiradas las TIM y TKN, al uno y otro lado de los puntos I, K se toman las rectas IM, IR, y KN, KS, iguales respectivamente a los arcos IM, IR, o a sus cuerdas que no discrepan notablemente²⁷²”. Graduadas las imágenes de los meridianos y de los paralelos extremos, podrían dibujarse las rectas que representan a los primeros y los arcos representantes de los segundos: “hecho esto, se señala cada lugar donde pide su longitud y latitud”.



Representación del trapecio esférico MNRS en el plano del mapa, coincidente con el desarrollo del cono circunscrito a lo largo del paralelo medio IK. Copia de la ilustración usada por Benito Bails en sus lecciones cartográficas.

Bails dedicó un apartado de estas lecciones a la interesante cuestión de las cartas marinas²⁷³, que tanto proliferaron durante los siglos XVI, XVII y

²⁷² La diferencia entre la cuerda y el arco queda reflejada por la flecha de este. En caso de que la latitud fuese de 40° y la amplitud longitudinal de 2°, resultaría $f = R (1 - \cos 1^\circ) \text{ctag } 40^\circ \approx 1.1564 \text{ km}$ de modo que si la escala elegida hubiera sido de 1/100000, equivaldría a unos 1.1mm; el desarrollo del arco del paralelo sobre el mapa sería de 26.5 cm aproximadamente.

²⁷³ Bails llamó mapas hidrográficos a las representaciones de una porción del mar que “son de uso continuo en la navegación”.

XVIII. Antes de referirse a su formación, hizo un resumen de lo tratado hasta entonces: “en lo propuesto se echa de ver que todos los meridianos se dirigen a un mismo punto. En los mapas generales las partes del globo están en perspectiva y ni los grados del ecuador ni los del meridiano son representados por partes iguales”. Contrariamente había otros casos en que los meridianos eran líneas rectas, siendo iguales entre sí tanto los grados de latitud como los de longitud, aunque estos últimos fuesen menguando a medida que aumentaba la latitud. Para Bails estos últimos representaban mejor las partes del globo, al hacerlo de modo mucho más natural que los otros. Sin embargo presentaban un serio inconveniente cuando se pretendían usar como ayuda a la navegación, y dibujar sobre ellos el rumbo que se había seguido o el que se quería seguir. Inmediatamente después exponía el problema que se plantearía con suma claridad: “Como este rumbo forma constantemente un mismo ángulo con todos los meridianos que atraviesan, no se podría pintar sino como una línea curva²⁷⁴, si los meridianos no fuesen paralelos en el mapa y se haría muy complicada la reducción de los rumbos. Con el fin de vencer esta dificultad se inventaron los mapas planos, cuya construcción es como sigue”.

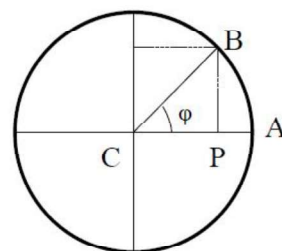
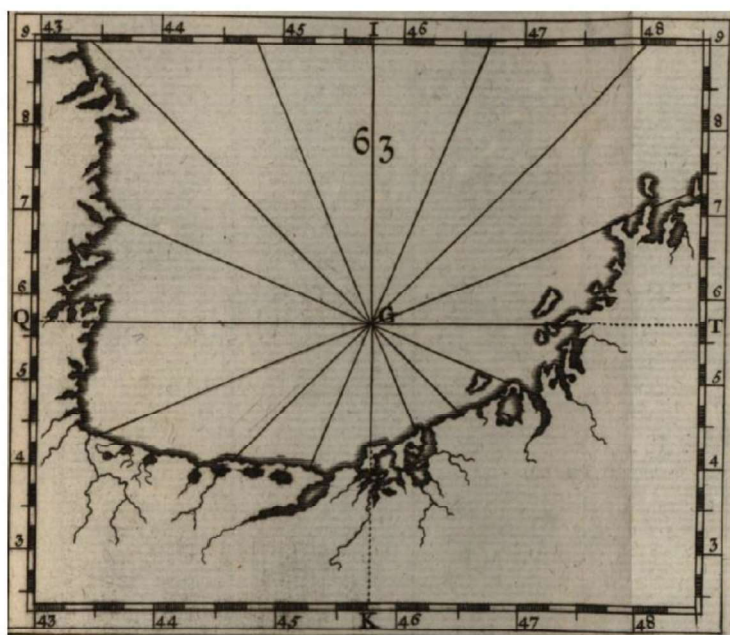
Bails recurrió a la figura anterior para convertir la representación del paralelogramo curvilíneo en el mapa plano, es decir uno en el que las imágenes de los paralelos no fuesen disminuyendo al aumentar la latitud: “si imaginamos que por los puntos I, K del paralelo medio, se han tirado las dos rectas AB y CD paralelas al meridiano GT que pasa por el medio G del mismo paralelo...desde M a R suponemos todos estos paralelos iguales al paralelo medio IK;...y estando el punto T a una distancia infinita²⁷⁵, los arcos MN, IK, RS se transforman en rectas AC, IK, BD perpendiculares a GT; de donde se saca la siguiente construcción”. Continuaba indicando Bails que debía trazarse una recta arbitraria, QT, imagen del meridiano que pasara por el centro del mapa. Dicha línea se dividiría en tantos grados como hubiese comprendidos entre los dos paralelos extremos. En su centro, G, se dibujaría la perpendicular IGK, imagen del paralelo medio. La

²⁷⁴ Esas líneas de igual acimut, o de igual rumbo (las llamadas loxodrómicas), son en la esfera espirales que se acaban enrollando en torno al polo. El matemático portugués Pedro Nunes fue el primero que introdujo su estudio en la obra *Tratado em defesa da carta de marear* (1537), aunque el nombre de loxodrómica sea debido al holandés Willebrord Snell (Snellius): *Tiphys Batavus, sive Histiodromice, de navium cursibus, et re navali* (1624). Años después también se interesaron por esta teoría G. B. Leibnitz y J. Bernouilli.

²⁷⁵ Esa suposición equivalía a la sustitución del cono circunscrito, a lo largo del paralelo, por un cilindro tangente en el ecuador.

dificultad se planteaba al fijar el valor de los segmentos GI y GK, proporcionales como es sabido al radio del paralelo y por tanto al coseno de la latitud.

Bails la resolvió gráficamente: “con un radio CA igual a la cantidad que se ha tomado para representar un grado de meridiano, que también representa un grado del ecuador, trazaremos el arco AB de tantos grados cuantos cogiere la latitud media, después se bajará la perpendicular BP que determinará CP, y esta será la cantidad de cada grado de paralelo...Por consiguiente trasladaremos CP desde G hacia I y hacia K tantas veces cuantos grados hubiere en la mitad de la extensión que ha de coger el mapa en longitud”. La retícula ortogonal de meridianos y paralelos se conseguirá trazando paralelas a las dos rectas QT e IK, por las divisiones pertinentes, de esa forma “será fácil señalar los lugares en virtud de su longitud y latitud”.



Formación del “mapa plano”. En la figura auxiliar, si el radio se supone unitario, el segmento CP representa el coseno de la latitud y BP el seno de la misma. La imagen del mapa ha sido cedida por el Instituto y Real Observatorio de la Armada.

Aunque la solución propuesta no podía ser más simple, resultaba del todo insatisfactoria, de acuerdo con las mismas palabras de Bails:

“no hay duda en que para la navegación son más acomodados estos mapas que los demás, pero hemos de convenir en que son tanto menos exactos, cuanto mayor es la diferencia en latitud, y mayor al mismo tiempo la latitud

media. Dan los grados de los paralelos muy chicos por un lado y muy grandes por otro...Para remediar este defecto, dejando paralelos los meridianos se han discurrido los *Mapas reducidos*, cuyo uso es acomodado y seguro al mismo tiempo”. Se estaba refiriendo Bails a las representaciones cartográficas conocidas en sus inicios como *Cartas esféricas o de latitudes crecientes (o aumentadas)*, cuyo fin primordial era facilitar la navegación con la imagen rectilínea de las loxodrómicas.

Generalmente se insiste en que su inventor fue G. Mercator, reconocido como el Tolomeo de su tiempo, a pesar de que hay varios testimonios que parecen indicar la existencia de representaciones previas, que podrían haberle servido de modelo. Quizás fuese el gran cosmógrafo Alonso de Santa Cruz el primero que logró formar cartas marinas con loxodrómicas rectas, así lo aseguraba en 1914 el académico y marino ferrolano M. de Saralegui²⁷⁶. Uno de los argumentos esgrimidos fue que el matemático Edward Wright ya había reconocido, al explicar la base matemática del desarrollo cilíndrico y directo de Mercator, la contribución previa de Martín Cortés, uno de los discípulos del cosmógrafo sevillano²⁷⁷.

Bails resumía las principales características de este importante descubrimiento cartográfico afirmando que con los mapas así contruidos se representaba todo el globo, “o por lo menos su contorno en la dirección del ecuador, no son otra cosa que la resolución de un cilindro que imaginamos circunscrito a la Tierra, y cuyo diámetro es por consiguiente el mismo que el del ecuador, pero infinitamente largo²⁷⁸”...El fin de su construcción no es otro que hacer paralelos los meridianos, sin mudar no obstante la razón entre las partes del meridiano y las de los paralelos”.

²⁷⁶ Manuel de Saralegui y Medina: *Alonso de Santa Cruz inventor de las Cartas esféricas de navegación*. En la conclusión de su obra aseguraba que Wright perfeccionó en 1599, aquello mismo que inventó en 1540, Alonso de Santa Cruz, añadiendo “que así como es injusta la usurpación de ajenos timbres, es criminal la impasibilidad ante el despojo de los propios; y que no siempre son cerebros extranjeros los que perciben, antes y mejor, los espléndidos destellos del supremo saber y de la luz de Dios”.

²⁷⁷ En el capítulo II de la obra de E. Wright (*Certain Errors in Navigation Detected and Corrected*) se citaba lo siguiente: “...a causa de no estar los meridianos correctamente divididos, puesto que las divisiones son iguales en todas partes, ni los paralelos correctamente trazados, pues que en todas partes es igual la distancia que los separa, e igual también a la que guardan entre sí los meridianos en la equinoccial, siendo así que los espacios entre los paralelos debía aumentar cada vez más conforme se parte de la equinoccial hacia cualquiera de los dos polos, lo cual también notó Martín Cortés en su tercer libro y 2º capítulo de *El Arte de Navegación*, aunque omitió decir aquello en que estriba la mayor dificultad, esto es, en cuál o en qué proporción deben aumentarse aquellos espacios o separaciones”.

²⁷⁸ Bails estaba refiriéndose indirectamente al hecho de que la imagen de los polos, en este sistema, no tiene representación. Las ecuaciones de esta proyección directa de Mercator son las siguientes: $X = R \lambda$ e $Y = R \ln \tan(\pi/4 + \phi/2)$, siendo λ la longitud y ϕ la latitud. Como el valor de esta última es de 90° en los polos, la ordenada Y, tendería a infinito.

La característica fundamental de ese desarrollo cilíndrico es la de su conformidad, manifestada geométricamente a través de dos propiedades: la perpendicularidad entre las imágenes de los meridianos y de los paralelos, y la igualdad de las deformaciones a lo largo de unos y otros. Dichas deformaciones se pueden evaluar fácilmente, por medio de la relación entre cualquier elemento diferencial de línea en el mapa y su homólogo, del que procede, en la esfera. Procediendo así, con el situado en un cierto paralelo de latitud φ , resultaría: $\varepsilon = ds'_p / ds_p = R d\lambda / R \cos\varphi d\lambda = 1 / \cos\varphi = \sec\varphi$, es decir que el elemento diferencial del mapa, ds' , es igual al de la esfera, ds , multiplicado por la secante de la latitud.

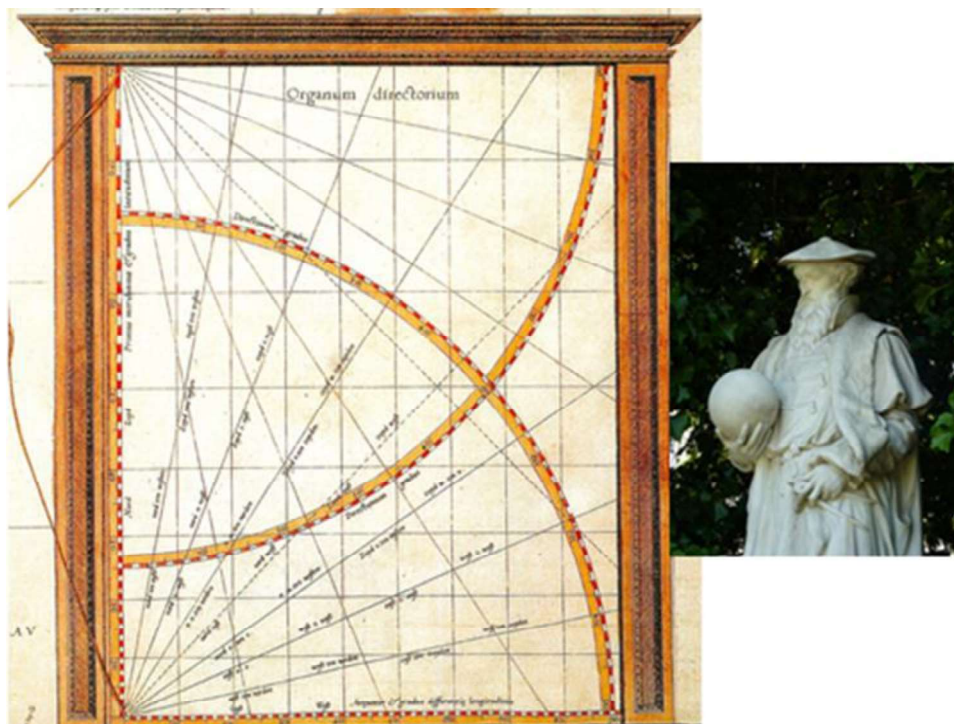
Bails reconocía la importancia de esa segunda propiedad, al manifestar:

“por consiguiente, como la cantidad de un grado tomado en un paralelo cualquiera es a la cantidad de un grado tomado en el ecuador,...,como el coseno de la latitud es al radio, o como el radio es a la secante de la latitud, si hacemos constantemente el grado de cada paralelo igual al grado del ecuador, será preciso, cuando se tratare de un punto situado a una latitud cualquiera, contar el grado de círculo máximo, como si su valor fuera el de un grado del ecuador aumentado en la razón del radio a la secante de la latitud, esto es, multiplicado por la secante de la latitud, dividida por el radio”. Al ser el coseno de la latitud tan determinante en el estudio de este sistema cartográfico, se comprende que su variación explique algunas de las propiedades básicas del mismo: a) en el ecuador, donde vale uno, no habrá alteración al pasar de la esfera al mapa, b) a medida que vaya creciendo la latitud irá aumentando la deformación, alcanzando sus valores extremos en las regiones polares, hasta el punto de hacerla inservible en aquellas latitudes²⁷⁹.

Puede resultar llamativo que, en este tipo de mapas, la separación entre las imágenes de los paralelos sea cada vez mayor al aumentar la latitud; un hecho bien explicado por Wright y aclarado todavía más por su compatriota Henry Bond en el año 1645, cuando dedujo la fórmula matemática con la que se obtenía la distancia de tales imágenes al ecuador: $\ln \tan (45^\circ + \varphi/2)$. Bails comentaba como podrían obtenerse esas distancias de forma

²⁷⁹ Para tener una idea más concreta, piénsese que la imagen en el mapa de una circunferencia con 10 km de radio en el ecuador sería otra de idéntico radio en el mapa. En cambio, si la circunferencia, de igual radio, se situase sobre el paralelo 60, su imagen sería otra circunferencia pero de 20 km de radio; obsérvese también que ese cambio de escala afectaría aún más a las superficies: si la magnitud del radio se duplica, la de la superficie se cuadruplica.

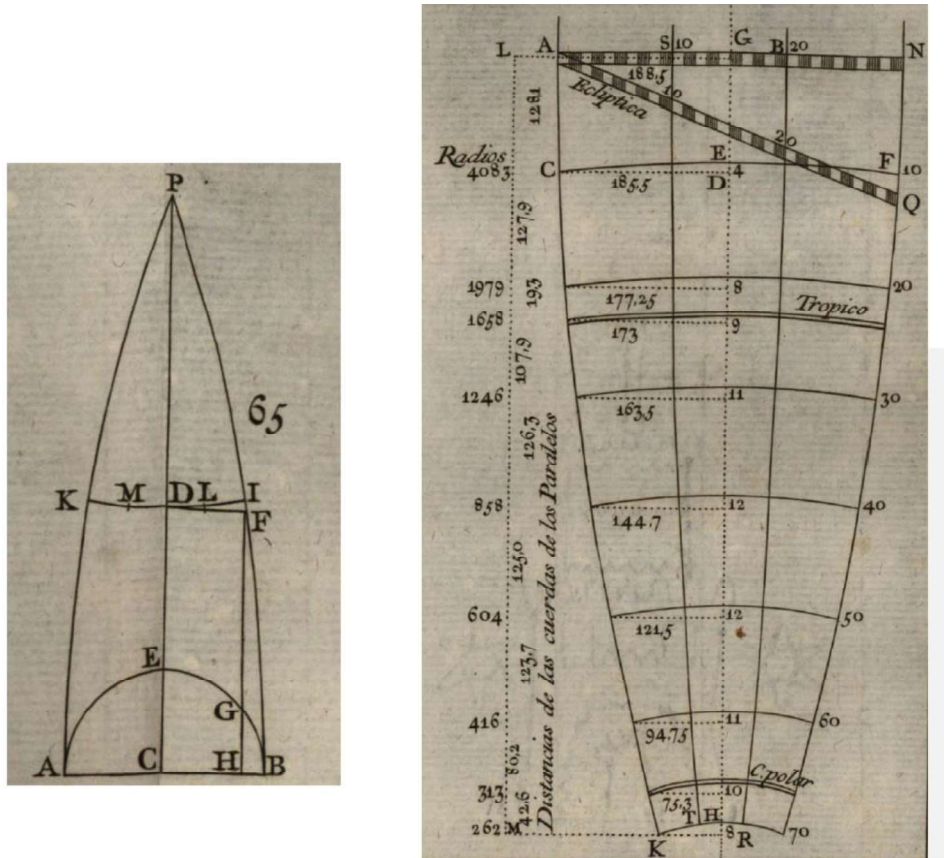
aproximada: “para determinar la extensión que se le debe dar al meridiano a fin de señalar una latitud determinada, basta tomar en las tablas todas las secantes de minuto en minuto desde 0°, hasta el grado de latitud de que se trata. Dividiendo la suma de estas secantes por el radio, se sacará un número de minutos, el cual trasladado desde el ecuador sobre el meridiano, determinará el grado de la latitud de que se trata con bastante exactitud”. Las palabras de Bails, con la terminología moderna, venían a decir que la distancia se podía obtener resolviendo la integral definida $\int_0^\varphi \sec \varphi \, d\varphi$, para llegar precisamente al logaritmo neperiano anterior.



El Organum Directorium de Marcator, ábaco esencial que acompañó al mapa Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usus Navigantium Emendate Accommodata (Duisbourg. 1569) para ayudar a resolver los problemas geométricos que pudiesen plantearse sobre el mismo. El mapa constó de 24 hojas dibujadas a escala de 1/20600000, figurando el ábaco en la número 24.

Termina este capítulo con una interesante aportación de Bails a la cartografía globular, aunque ceñida solamente a la construcción de globos; unos instrumentos matemáticos esencialmente didácticos que venían usándose desde la antigüedad para entender mejor la configuración del cielo y de la Tierra. La formación del globo en el siglo XVIII requería el dibujo previo de la imagen plana de la esfera, una especie de mapa que evidenciaba palmariamente el carácter no desarrollable de su superficie. En efecto, para construir un globo terráqueo se dividía la esfera en un

determinado número de husos²⁸⁰, y se procedía luego a obtener, punto a punto, la imagen plana de cada uno de ellos; se obtenía así una serie de dobles segmentos circulares con idéntica forma, aunque solo tuviesen en común, con los contiguos, sus extremos ecuatoriales. Una vez completados todos ellos, con la información geográfica correspondiente, se pegaban sobre la esfera preparada al efecto.



La construcción de un globo, según Benito Bails. Imágenes cedidas por el Instituto y Real Observatorio de la Armada.

Bails incidía sobre esa necesidad, cuando manifestaba que para construir globos celestes o terrestres “es preciso hacer grabar unos segmentos que también son una especie de proyección o una resolución del globo”. Sobre el eje central de cada huso, la recta CP en la figura siguiente, se trasladaría a la escala conveniente el desarrollo de la cuarta parte de la circunferencia de la Tierra. Se marcarían además las diferentes latitudes, a partir del polo, con radios dados por la cotangente de la latitud respectiva; de ese modo las imágenes de los paralelos serían arcos de circunferencia con desarrollo

²⁸⁰ Se define el huso esférico como el espacio comprendido entre dos círculos máximos de la esfera. Estos círculos, en el caso de los globos terrestres, coinciden con los de los meridianos. En cuanto al número de husos, se comprende que ha de ser divisor de 360.

decreciente al alejarse del ecuador²⁸¹, que se representa en verdadera magnitud. La construcción del globo requería precauciones añadidas, tal como recordaba el propio Bails: “pero hace trabajosa esta operación la alteración que padecen los segmentos al encolarlos en el globo, y el determinar cuanto menos se debe estirar el papel en los lados que en medio, por ser más largos los lados, para que cuadre puntualmente con el espacio que ha de cubrir”.

Aunque el número de husos fuese variable, Bails prefirió centrarse en la construcción de un globo con doce husos, y por tanto con una amplitud de 30° . Primeramente se trazaban dos rectas perpendiculares en un punto dado, centrando sobre una de ellas el segmento AB de la figura adjunta, igual al desarrollo lineal de los 30° , y llevando sobre la otra el segmento CP, cuya longitud debería ser triple de la anterior: “porque los papeles, cuyas dimensiones fueren iguales a las cuerdas, son iguales a los arcos mismos, cuando se les encola en el globo”.

La formación de la imagen plana del huso dependía, además de la escala, de la equidistancia fijada para las imágenes de los paralelos; al decidir Bails que fuese de 10° , tuvo que dividir el segmento CP en nueve partes. Para ir localizando los límites del huso se valió de la siguiente construcción auxiliar: “también se divide en 9 partes iguales el cuadrante del círculo BE, por cada punto de división, cual es G, del cuadrante de círculo, y por el punto correspondiente D de la recta CP, se tiran perpendiculares HGF y DF, cuyo concurso en F determina uno de los puntos de la curva BFP que terminará la circunferencia del segmento. Después de determinados por este medio muchos puntos de la curva se traza el contorno PIB con una regla curva”.

Las imágenes de los paralelos serían arcos de circunferencia, en tanto que se suponía en cada caso un cono tangente a la esfera a lo largo de los mismos. Los meridianos también se trazarían de diez en diez grados: “dividiendo cada paralelo como KI en 3 partes en los puntos L y M, y tirando desde el polo P por todos estos puntos de división curvas que representen los meridianos que están entre PA y PB, cuales son BR y ST” . En el globo se representaría también la intersección de la esfera terrestre

²⁸¹ Bails fue mucho más concreto: “los arcos de cada uno como DI son iguales con corta diferencia al número de grados del ancho del segmento multiplicados por el seno de la latitud”. Recuérdese que el radio del paralelo en la esfera es el producto del radio de esta y del coseno de la latitud.

con el plano de la eclíptica, ya que así se ubicaban con menor incertidumbre los trópicos y los dos círculos polares. Tras comentar las alteraciones que sufría el papel al encolarlo sobre el globo, Bails recomendó el del tipo *Jesús*²⁸², que había empleado el cartógrafo francés Rigobert Bonne en su globo terrestre de un pie de diámetro.

²⁸² Llamado así por llevar una filigrana con el monograma IHS.

5. TOPOGRAFÍA



Herodoto fijó el origen de la geometría en el antiguo Egipto, coincidiendo con el reinado de Sesostris. Gracias a su concurso pudieron replantearse los límites de las propiedades rústicas desaparecidas tras las periódicas inundaciones del Nilo. Aristóteles atribuyó su invención a los sacerdotes egipcios, siempre dedicados al estudio. Sabios tan celebrados como Tales de Mileto, el primero en medir la altura de la gran pirámide de Giza, Pitágoras y Euclides adquirieron la mayoría de sus conocimientos durante su estancia en aquel país. Herón de Alejandría recopiló muchos de ellos en obras tales como *Metrica*, perdida hasta 1896, y *Dioptra*; en esta última detalló la casuística topográfica e incluso describió un instrumento, de igual nombre, que permitía medir ángulos y desniveles con cierta exactitud.

Es sabido también que muchos de los manuscritos griegos fueron traducidos al árabe y después al latín, gracias a las Escuelas de Traductores²⁸³ creadas tanto en Córdoba como en Toledo, propiciándose así el desarrollo científico en el occidente cristiano. Fue asentándose así un legado cultural que floreció aún más durante el Renacimiento, al contar con el inestimable apoyo de la imprenta de J. Gutenberg, con la publicación de las obras clásicas griegas, más o menos revisadas por los primeros traductores árabes. Con tales mimbres fueron surgiendo los primeros tratados en lengua vulgar, de autores tan relevantes como los españoles Juan de Rojas, Pedro Ambrosio de Ondériz y Juan Cedillo Díaz, o el francés Oronce Finé, cuyos dos libros de Geometría Práctica fueron traducidos en el año 1553, del latín original al español, por Pedro Juan de Lastanosa²⁸⁴.

La Geometría práctica fue precisamente la denominación más corriente que tuvo la Topografía durante un prolongado espacio de tiempo, iniciándose su declive en la frontera de los siglos XIX y XX. El nombre respondía desde luego a sus orígenes, a tenor de lo relatado por Herodoto o de los comentarios realizados por Diodoro de Sicilia en el libro primero de su *Bibliotheca Historica*: “los sacerdotes enseñaban a sus hijos dos clases de ciencias...las sagradas y las profanas. Sin embargo, debían aprender sobre todo, geometría y aritmética, pues el río se desbordaba todos los años, cambiando frecuentemente la fisonomía del paisaje y desdibujando los

²⁸³ De entre todos los traductores, me permito seleccionar al francés Gerbert d'Aurillac, futuro Papa Silvestre II, y al italiano Gerardo de Cremona, el primero en traducir al latín la versión árabe del *Almagesto* (*Kitab al-Medjisti*, el más grande) de Claudio Tolomeo. Tanto uno como otro aprendieron el árabe durante sus prolongadas estancias en la España musulmana.

²⁸⁴ Un ejemplar manuscrito, bellamente ilustrado, se conserva en la Biblioteca Nacional de España.

límites de las propiedades, y había que contar con personas hábiles en el arte de la agrimensura y de la medida de las tierras...evitando así los problemas que continuamente se planteaban entre los vecinos”. El primer significado etimológico del vocablo geometría aún está vigente, buen ejemplo de ello es la palabra *géomètres*, con la que se identifica en Francia al colectivo de los profesionales que la practican.



Ilustraciones geométricas del siglo XIV y XV. En la primera imagen (Elementos de Euclides, c. 1310), los discípulos atienden las enseñanzas de una mujer. En la segunda, del siglo XV, se ofrece un caso práctico con dos protagonistas: cristiano y musulmán.

Cuando Bails incluyó a la Topografía en el cuadro de sus enseñanzas, también eligió la misma denominación de Geometría Práctica por considerarla como mera aplicación de la Especulativa²⁸⁵; así lo hizo en el prólogo del tomo I de Los Elementos de Matemática (1779), cuyas últimas páginas (400-545) las dedicó al desarrollo de los epígrafes siguientes: *De las Medidas, De las Líneas, De la Pantómetra, De las líneas de las partes iguales, De las líneas de las cuerdas, De la línea de los polígonos, Usos de la pantómetra en la trigonometría, De la línea de los planos, De la línea de los sólidos*²⁸⁶, *De la línea de los metales*²⁸⁷, *Métodos para tirar líneas, De*

²⁸⁵ Añadiendo “como todo lo que aquella enseña va fundando en lo que esta demuestra, y no hay entre las maniobras de la práctica el estrecho enlace que traba unas con otras las proposiciones teóricas, las tejimos con gran facilidad”.

²⁸⁶ Llamadas también líneas estereométricas, eran unas escalas que permitían comparar los volúmenes entre diferentes sólidos.

la Nivelación, Métodos para dividir las líneas, Métodos para formar y medir los ángulos, Métodos para la medida de las líneas, De las figuras, De la transformación de las figuras, De la división de las figuras, De las superficies, De los sólidos.

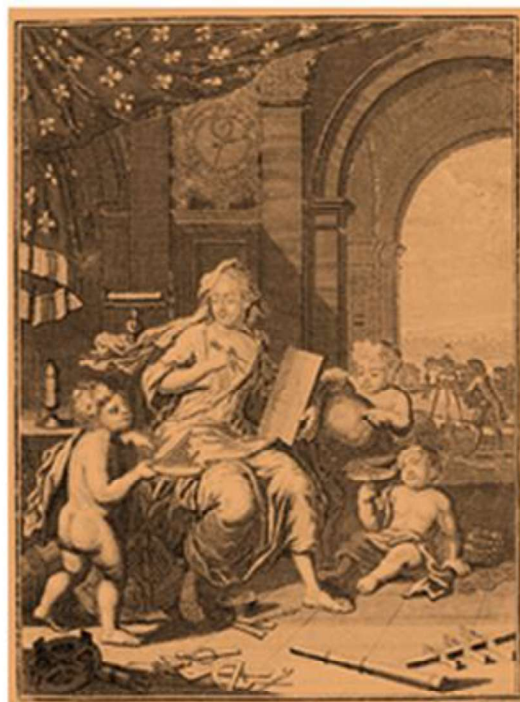
Tales epígrafes fueron completados con los que dedicó a la Nivelación: *Instrumentos para nivelar, Nivel de nueva construcción, Verificación del nivel, Práctica de la nivelación, Nivelación simple, Nivelación compuesta, Perfil de la Nivelación, Otro método para trazar el perfil de una nivelación.* Este importante capítulo formó parte del tomo IX de *Los Elementos de Matemática*, integrándolo en la segunda parte del mismo: *Tratado de Arquitectura Hidráulica* (1790). No obstante, Benito Bails ya había ensamblado todos los epígrafes anteriores en una obra más genérica, que publicó, junto a Gerónimo de Capmany, en el año 1772. Cinco años después resumió el contenido de todos ellos en un capítulo del tomo I de sus *Principios de Matemática, donde se enseña la especulativa con su aplicación...*, titulado *Aplicación de la Geometría y Trigonometría a diferentes asuntos de la Práctica* (pp.323-366): *De las Medidas, De la práctica de las medidas en el terreno, Del Grafómetro, del modo de usarle y verificarle, Reducción de los ángulos al centro, Modo de levantar los planos, De los instrumentos que sirven para levantar los planos, De la Nivelación.*

Benito Bails consultó, para preparar estas lecciones, las últimas novedades editoriales de su tiempo. Él mismo destacó en primer lugar la que dio fama²⁸⁸ al ingeniero real Nicolas Bion: *Traité de la construction et des principaux usages des instrumens de mathématique*, cuya cuarta edición apareció en el año 1723. Acto seguido comentó que “los que no quisieren obra tan extensa, podrán contentarse con la siguiente, de la cual se han publicado tres ediciones en poco tiempo en Inglaterra”: *A treatise of such Mathematical instruments, as are usually put into a Portable case, showing some of their use in Arthmetic, Geometry, Trigonometry...*(1775), cuyo autor fue John Robertson. Finalmente citó otras dos de agrimensura, que se habían publicado recientemente en Francia: *L'arpenteur forestier, ou*

²⁸⁷ Sobre ellas solían grabarse los símbolos químicos de los metales. Abierto el sector, el intervalo entre marcas correspondientes proporcionaba el diámetro de la bola (o del lado en otros sólidos) semejante a otra y de igual peso.

²⁸⁸ El historiador de la ciencia David M. Knight lo consideró (1975) el mejor libro dedicado a los instrumentos (*Sources for the history of science 1660-1914*).

methode nouvelle de mesurer, calculer, et construire toute sorte de figures (Guiot.1764) y *Manuel de l'arpenteur* (Ginet.1770).



Cubierta y frontispicio alegórico del Tratado de Nicolas Bion, consultado por Benito Bails al redactar sus Lecciones de Topografía.

Antes de adentrarse en los preceptos topográficos, propiamente dichos, se refirió Bails a las numerosas dificultades que planteaba la falta de una medida de carácter universal, cuya incidencia sobre la posible comparación de las efectuadas en países diferentes resultaba obvia. Para él, los inconvenientes asociados a esa carencia eran similares a los que se presentaban al usar los instrumentos de medida, pues por muy exactos que se fabricasen nunca proporcionarían, en rigor, los resultados teóricos previstos. Bails creía que la multiplicidad de medidas era tan perjudicial para el comercio “como contraria a la exactitud matemática”.

La utilidad de un solo patrón metrológico en el comercio parecía evidente, pues en el supuesto de contar con él se favorecerían los trueques, ya que como apuntaba Bails “para averiguar la razón de las cantidades que se han de cambiar, no hay medio más sencillo y seguro que una medida fija y universal”. Fue muy revelador su siguiente comentario: “en vano se nos opondrá para eludir la fuerza de este argumento, que reducidas a la uniformidad todas las medidas, perderían muchos Mercaderes la ganancia que se les sigue de la poca conformidad que entre ellas se repara”. Después

de tratar de disipar el posible temor a su implantación por los defensores de intereses más o menos espurios, continuó afirmando que el beneficio, de cualquiera de las partes, atendiendo solamente a la cuestión metrológica, podría resultar doloso y concluir con un trato ilícito.

Aún en el supuesto de que pudiese ser provechosa para unos pocos, la falta de un referente universal, habría que procurar

“la comodidad y ventaja que hallarían todos los demás habitantes de un Reino en la igualdad de las medidas...Sería sin duda alguna muy provechoso para los cambistas el que hubiese distinta moneda en cada Ciudad y en cada calle; pero no por esto deja de ser más ventajoso para el público que no haya sino una moneda en cada Reino. Pensar lo contrario sería lo mismo que mirar como útil a la sociedad la multiplicidad de las lenguas, por la razón de que si hablasen una misma todos los hombres, no necesitaríamos de intérpretes”.

Bails mostraba la necesidad de concienciar a la sociedad para allanar las inevitables dificultades que surgirían al implantar la medida universal, puesto que “el que esperare hallar...la docilidad en que debería afianzarse el beneficio de esta providencia, ignoraría a buen seguro cuán rendido y obstinado obedece el vulgo al imperio de la costumbre”. Al mismo tiempo apuntaba que muchos de los problemas se podrían ir subsanando sobre la marcha: “si se admitiese una medida general, sería preciso alterar todos los títulos antiguos, cuya operación encontraría muchas oposiciones, y no sería la menor la de las partes interesadas...No sé yo que sea más difícil introducir en un Reino una medida nueva, que dar curso a una nueva moneda, o mudar el valor de la antigua; y esto se ha ejecutado varias veces”.

Para facilitar su implantación recomendaba Bails que durante un cierto periodo transitorio coexistiera con las medidas antiguas: “precisando a que todas las ventas, arrendamientos y todos los recibos en que hubiere de intervenir el ministerio público de los Escribanos o de los Tribunales, se hiciesen con arreglo a la medida antigua y a la nueva”. A tal fin propuso que se confeccionasen las tablas de conversión correspondientes, cuya distribución debería ser gratuita. Con idéntico objeto recomendó que se conservasen en lugares estratégicos los patrones de las dos medidas, a la

vez que se multiplicaran los de la nueva “haciendo que fuesen más comunes y baratos que los de las antiguas”.



A la izquierda figura la vara de Zafra (en su Plaza Chica), usada siglos atrás, por el almotacén, para contrastar las medidas efectuadas en el mercado de la zona. A la derecha aparece la cana de la Catedral de Barcelona (Capilla de Santa Lucía), con una longitud doble que la anterior; esta también fue usada como patrón, a instancias del Consell de Cent, cuando funcionaba el mercado de sus alrededores.

Para abundar todavía más en la inconsistencia de las medidas de su tiempo y en la conveniencia de elegir un prototipo único llamado que debería sustituir a todas ellas, recordó Bails dos ejemplos muy ilustrativos. El primero hacía mención a la costumbre ancestral de considerar el grano de cebada como fundamento y raíz de todas las medidas: “tres o cuatro de estos granos puestos de punta a continuación los unos de los otros componen la medida que se llama pulgada²⁸⁹”; aunque añadiese a continuación que al no ser constante la longitud del grano ni fijo el número de granos necesarios, resultaba incierto no solo el valor de esa medida sino que también lo sería el de todas las obtenidas a partir de ella. El segundo ejemplo es más conocido, pues se trataba del pie, una de las medidas antropométricas, cuya longitud dependía del lugar considerado, como buen

²⁸⁹ Bails remitía a las dos obras siguientes: *Cursus seu Mundus Mathematicus*, escrita por el matemático jesuita Claude François Milliet Dechaies en 1690, y a la *Geographia generalis*, del geógrafo alemán Bernhard Varen (1650), revisada y completada por Isaac Newton en 1672.

señalaba Bails: “varía su longitud de un País a otro, y aun cuando la quisiéramos determinar por la del pie humano, a imitación de los antiguos²⁹⁰, tampoco saldría invariable esta medida, por la razón que cualquiera puede adivinar”.

Benito Bails inició su aportación topográfica, propiamente dicha, planteando una serie de ejercicios de geometría elemental, que resolvió gráficamente con la ayuda de un instrumento llamado Sector, Compás de Proporción o Pantómetra²⁹¹, cuya invención suele atribuírsele al matemático francés Abel Foulon (1555), aunque lo popularizara Galileo, gracias a su obra *Le operazioni del compasso geometrico et militare* (1606). Bails le dio gran relevancia a este primer instrumento, por “la multitud de operaciones, a cual más importante que con él se ejecutan con suma facilidad”. La sucinta descripción que hizo del mismo, con ilustración incluida, fue la siguiente: “un instrumento que se compone de dos reglas unidas por medio de una charnela o gozne, alrededor de cuyo centro se mueven con facilidad. En estas reglas que llamamos las piernas de la Pantómetra, van señaladas varias líneas, que son *las líneas de las partes iguales, de las cuerdas, de los planos, de los polígonos, de los sólidos, y de los metales*”.

La base operacional del sector no era más que la materialización del primer teorema de Tales²⁹², es decir el que establece la proporcionalidad entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes. Así lo daba a entender Bails cuando comentaba que el compás podría abrirse a voluntad, de manera que siempre sería factible encontrar un segmento transversal, entre las dos patas y paralelo al que une sus extremos, que guardase con él la razón pretendida. En cuanto a su empleo, advertía Bails que cuando usara, durante sus explicaciones, la expresión *tomar una línea*

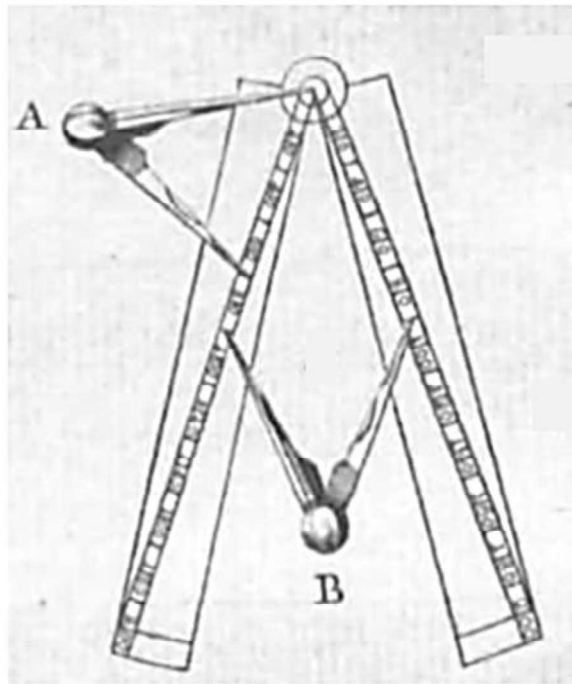
“se debería abrir el compás común, de suerte que sus dos puntas caigan sobre los extremos de la línea que se hubiese de tomar. Cuando digamos que se *tome un número* en la Pantómetra, se abrirá el compás común desde el centro del de proporción hasta dicho número, y cuando dijéremos que se

²⁹⁰ Bails remitía en este segundo ejemplo a la obra, *Traité des Mesures itinéraires anciennes & modernes* (1769) del geógrafo francés Jean Baptiste Bourguignon d'Anville.

²⁹¹ No debe confundirse esta instrumento, esencialmente geométrico, con el homónimo topográfico, que en sus comienzos no fue más que una escuadra de agrimensor perfeccionada, a la que luego se le incorporó el anteojo.

²⁹² El segundo teorema establece que en una circunferencia dada, de diámetro AC, un punto B distinto de los otros dos, forma con ellos triángulo rectángulo.

lleve una línea a dos números de la Pantómetra, como a 100 y 100, por ejemplo, queremos dar a entender que se deberá abrir la Pantómetra de manera que habiendo tomado con el compás común una línea y aplicado una de sus puntas en el número 100 que está en una pierna de la Pantómetra, la otra punta del compás común caiga exactamente sobre el número 100 de la otra pierna de la Pantómetra”.

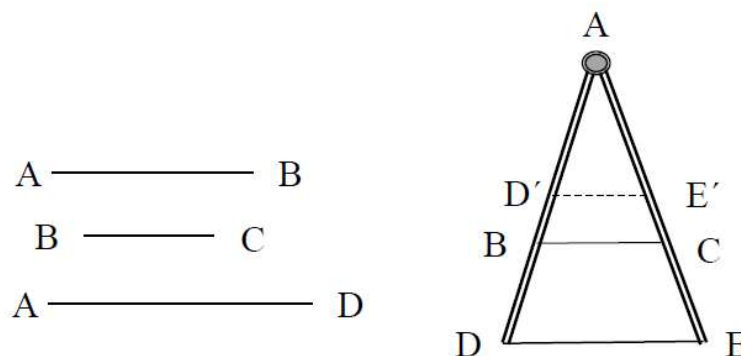


Manejo del compás común y del de proporción. Ilustración de Bails para explicar el concepto llevar una línea.

Las líneas de las partes iguales del sector podían servir para dividir una línea dada en tantas partes iguales como se quisiera. Bails explicaba que en los supuestos en que la línea fuese tan larga que no cupiera entre las piernas del sector, y se quisiera dividir por ejemplo en siete partes, “sería preciso dividirla primero en muchas partes iguales a arbitrio, tomando después la séptima parte de cada una, y sumando unas con otras estas séptimas partes, resultaría la séptima parte de toda la línea”. Otro de los supuestos previstos por Bails fue la división de una línea en un número muy elevado de partes, poniendo el ejemplo de 100. Para ello recomendaba dividirla antes en uno cualquiera de los divisores de 100, 5 por ejemplo, “hecho esto se dividirá cada una de las cinco partes en 2, y estará dividida la línea propuesta en 10 partes, pues la mitad de 20 es 10. Se dividirá cada una de estas partes,

primero en 5 y después en 2; y concluido esto, estará dividida la línea propuesta en 100 partes”.

Otra de las frecuentes aplicaciones que apuntaba Bails, de las líneas de las partes iguales, fue la posible comparación entre las longitudes de dos segmentos, a partir de la de uno dado. Daba el ejemplo de uno que midiese 25 varas y se deseara saber cuántas veces estaría comprendido en otro. Para resolver el ejercicio se procedería de la siguiente forma: “llevo la línea sobre 25 y 25, tomo después la otra y la llevo sobre la Pantómetra al través, de modo que sus extremos descansen sobre un mismo número, por ejemplo, sobre 42 y 42; este número determinará el valor de la línea”.



Cuarta Proporcional: $DE = AD \cdot BC / AB$

Tercera proporcional: $D'E' = BC^2 / AB$

La cuarta y la tercera proporcional, por medio del Compás de Proporción. Ilustración de Benito Bails en sus lecciones de Topografía.

Con el último ejercicio que propuso, en este apartado, se pretendía hallar las longitudes de segmentos que fuesen proporcionales a las de otros dados. Dos fueron los casos particulares que contempló: 1) cuarta y 2) tercera proporcional, estas fueron las explicaciones respectivas. 1) Se pretendía hallar la cuarta proporcional, DE, a tres segmentos dados AB, BC y AD. Para ello, se acoplarían las puntas del compás común sobre los puntos A y B, seguidamente se llevaría a la línea de las partes iguales, estando uno de ellas situada en el centro del sector. Después se abriría este para que cupiera justamente el segmento BC, “hecho esto, se llevará sobre la línea de las partes iguales la tercera línea AD; será el intervalo DE la cuarta proporcional que se busca”. 2) Si se quisiera hallar la tercera proporcional a los dos segmentos AB y BC, el proceso sería más simple, como indicaba

Bails: “estaría hecha la operación con tomar AD' igual a BC , y sería $D'E'$ la tercera proporcional que se busca”.

Otra de las líneas representadas en el Compás de proporción eran las denominadas líneas de las cuerdas, definidas por Bails del modo siguiente: “señala la línea de las cuerdas las de un círculo cuyo diámetro es igual a la longitud de la Pantómetra, y el radio a su mitad, que es igual a la distancia que hay entre el centro del instrumento y el número 60”. Con su ayudase podía dibujar en un punto cualquiera de una recta un cierto ángulo, formar varios ángulos abriendo el instrumento, hallar el valor de un determinado arco o bien obtener el radio de una circunferencia dada en función de la cuerda asociada a un ángulo, además de construir un polígono regular a partir de uno de sus lados.

Las líneas de los polígonos señaladas en el compás permitían la construcción de todos los inscritos en una circunferencia, hasta el decágono incluido: “cuyo diámetro es igual a lo que coge de largo la Pantómetra, y el radio a la distancia que hay entre el centro del instrumento y el punto de la línea de los polígonos donde está el número 6”. También explicaba Bails como podía inscribirse un polígono dado: “se llevará el radio del círculo propuesto sobre 6 y 6, y estando abierta como para esto se requiere la Pantómetra, si se quisiere inscribir un pentágono, se tomará el intervalo entre 5 y 5, y llevándole alrededor de la circunferencia, quedará ésta dividida en cinco partes iguales”.

Bajo el epígrafe destinado a los usos de la pantómetra para la trigonometría, abordó Bails los clásicos ejercicios característicos de la construcción de triángulos, en función de sus lados y ángulos. El primer caso versó sobre como hallar los tres ángulos de un triángulo a partir de los valores de sus lados:

“Sea el triángulo propuesto ABC , cuyo lado AC sea de 100 varas, AB de 80, y BC de 60: se pide el valor de los ángulos. Para hallar el ángulo A , tómese con el compás común en la línea de las partes el intervalo de 60 partes, valor de BC opuesto al ángulo A : manteniendo el compás común en la misma abertura, póngase una de sus puntas en la línea de las partes iguales, donde está el número 80, y ábrase la Pantómetra hasta que la otra punta del compás caiga sobre 100: médase después el ángulo que formaren las líneas de las partes iguales, se hallará que es de 37° , y este será el valor

del ángulo A. Se practicará lo propio para hallar el valor del ángulo B, que será de 90° ; y tomando el suplemento de los ángulos A y B, se hallará ser el ángulo C de $53''$.

El segundo ejercicio pretendía hallar el tercer lado de un triángulo, sabiendo el valor de los otros dos y el del ángulo comprendido. En el tercero se daban dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, debiendo obtener los tres elementos restantes. Finalmente, al plantear el cuarto caso, los datos de partida serían el valor de un lado y los de los dos ángulos adyacentes, debiendo hallar los otros dos lados.



Compás de proporción y compás común. Dresde (c.1630).

Este instrumento resultaba especialmente útil cuando se querían dibujar figuras semejantes a una dada, debiéndose recurrir entonces a las llamadas *líneas de los planos*, definidas por Bails como “aquellas que están señaladas en la Pantómetra de manera que representan los lados homólogos de las figuras planas semejantes”. Dos fueron los ejercicios planteados en este caso: a) aumentar y disminuir una figura plana en una razón dada, y b) dadas dos figuras semejantes, hallar la razón que hay entre ellas. La resolución del primero se facilitaba cuando la figura era regular, puesto que todo se limitaba a la obtención del lado correspondiente, como detallaba

Bails “supongamos que se nos ofrezca aumentar un cuadrado en la razón de 4 a 9, llevo el lado del cuadrado propuesto desde 4 a 4 en la línea de los planos: el intervalo entre 9 y 9 señalará el lado del cuadrado que será al propuesto como 9 a 4; ...si fuese irregular la figura propuesta, por ser indispensable hallar muchos lados para trazar la figura semejante que se busca, se repetirá tantas veces la operación como lados hubiere”.

Para resolver el segundo supuesto, supuso Bails que las dos figuras serían pentágonos regulares, de lados AB y CD. Esta fue su explicación: “Tómese el lado AB del pentágono mayor y llévase sobre uno de los mayores números de la línea de los planos, pongo por caso sobre 60 y 60; tómese después el lado CD del segundo, y póngase al través sobre la misma línea, de suerte que sus extremos caigan sobre una misma división, pongo por caso sobre 40 y 40: la superficie del segundo pentágono será a la superficie del primero, como 40 es a 60, o como 2 a 3: quiero decir que será sus dos tercios”.

Con tales antecedentes geométricos, procedió Bails a enseñar el trazado de las alineaciones²⁹³, comenzando con el caso más simple: “cuando las líneas se han de tirar en el papel, se hace uso de una regla, instrumento tan conocido que tenemos por superfluo representarle”. Un poco más complicado era el problema que se planteaba cuando debían trazarse dichas líneas sobre el terreno o “en planos grandes”. Para ello se usaba una regla especial, conocida con el nombre de *compás de varas*, que Bails describía así: “es una regla de metal o madera, armada con dos puntas de acero móviles para afianzarlas a la distancia que se quiera la una de la otra”; como indica su nombre, la utilidad principal del instrumento era la de trazar circunferencias con radios grandes, como bien recordaba Bails: “se apartan las dos cajas hasta que haya entre las dos puntas que llevan una distancia igual al radio del círculo que se ha de trazar: se aplica después una punta del compás en el punto que ha de servir de centro, y se le hace dar la vuelta alrededor de este punto, de modo que la otra punta deje en el plano un rastro que señalará la circunferencia”.

Seguidamente explicó Bails el procedimiento a seguir para materializar sobre el terreno, con el único auxilio de jalones, una cierta alineación, ilustrándola como en el caso anterior con la figura correspondiente: “se

²⁹³ En este apartado hizo valer su condición de arquitecto, con unas ilustraciones tan atildadas como didácticas.

La dificultad aumentaba cuando la alineación discurría por un terreno con relieve acusado, de ahí que Bails particularizara la cuestión: método a seguir para *trazar una línea cuesta arriba*, para continuarla en *lo alto de la cuesta* y también para los supuestos en que hubiera de *atravesar un barranco*. Al empezar la subida era

249

D en la dirección CZ. Se comprueba la operación hacia lo alto de la cuesta, donde se podrán hallar dos jalones como E y F, desde los cuales se mirará a alguno de los jalones de la llanura como A y B, con las cuales ha de convenir exactamente el rayo visual”.

Para proseguir con la alineación en el punto culminante de la cumbre, “se plantará un jalón muy chico y delgado en D, desde donde se pueden ver los dos últimos C y B de la subida: a corta distancia se plantará otro en E algo más alto en la dirección de la línea CD: se plantará otro F más grueso, por medio del cual se podrá prolongar la línea hacia H”.

Si la línea tuviese que atravesar un barranco, cuya sección vertical AD se representa en la figura siguiente,

“después de prolongada la línea hasta C,..., se deberán alinear los dos últimos jalones C y D con los dos primeros A y B: si el rayo visual CD pasa por los jalones A y B, y los jalones intermedios del barranco hacia E estuviesen en el plano vertical de la línea, será perfectamente recta. Si fuese la distancia AD tan grande que sea difícil distinguir los jalones de los extremos, se enviará un peón a que tenga un sombrero detrás del jalón A, con lo que se percibirá mejor el cartón del jalón B”.

Bails termina estas alineaciones sin obstáculos, con un ejemplo en que se pretendían localizar sobre el terreno puntos intermedios de la línea formada por dos torres G y H, separadas por una distancia de algunas leguas:

“se plantará un jalón B hacia el medio, a corta distancia se plantará otro A alineado con BG. El que hiciere la operación, tendrá que volver a B, para ver si el rayo visual BA va a parar al medio de la torre H; si se desvía, supongamos, hacia la derecha, plantará el jalón B hacia la izquierda, y volverá a plantar el jalón A de manera que esté alineado con la nueva dirección BG; volverá a mirar si el rayo visual BA se termina en H, si se aparta todavía, se repetirá lo que hemos dicho, hasta que la línea AB sea la prolongación de BAH”.

El mayor inconveniente en este tipo de trabajos surgía cuando algún obstáculo obligaba a que la alineación, que lo alcanzaba, tuviese que cambiar varias veces de dirección antes de poder seguir materializando la primera línea prevista. Bails contempló en principio la posibilidad de que el obstáculo impidiera colocar piquetes entre dos puntos dados, A y B,

valiéndose solamente del rayo visual. La solución que propuso fue la siguiente: con centro en tales puntos “describanse con el compás de varas los dos arcos de círculo C y D, tírese la línea CD, que toque esos dos arcos, tómense lo más cerca que se pueda del obstáculo los dos puntos E y F, desde los cuales, como centros, describanse los dos arcos G y H en el mismo intervalo de los antecedentes; por los puntos A y B tírense tangentes a los arcos G y H: estas formarán la línea recta que se desea”.

Bails recurrió, no obstante, a otra alternativa más general, a la que se podría acudir en el supuesto de que el obstáculo impidiera el procedimiento anterior. Se elegiría un punto, fuera de la alineación prevista, desde el que se divisaran los puntos A y B. Seguidamente se obtendrían las distancias AC y BC, bien directamente o resolviendo los triángulos auxiliares señalados por Bails, en la figura siguiente, de los que se tendrían que haber medido algunos de sus ángulos. La solución se complicaría un poco más si no fuera posible localizar el punto C, desde el que se pudiesen ver los puntos A y B. Bails recomendaba que en tal caso se “buscaría un punto C desde el cual se pueda ver el punto B, y otro punto E desde el cual se pueda ver el punto A y el punto C. Midiendo o determinando...las distancias AE, EC y CB, se observará en el punto E el ángulo AEC, y en el punto C el ángulo ECB”. Procediendo así se dispondría de datos suficientes para resolver trigonométricamente el problema.

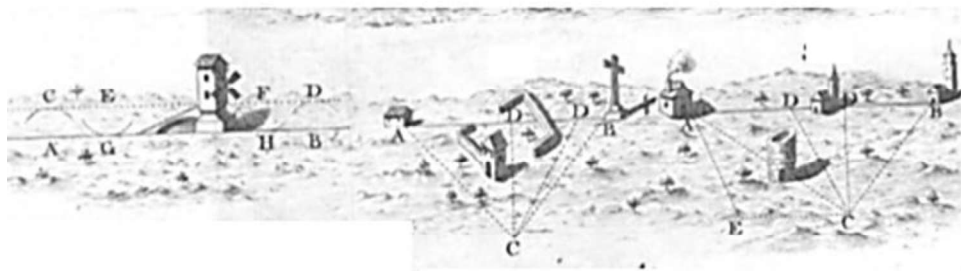
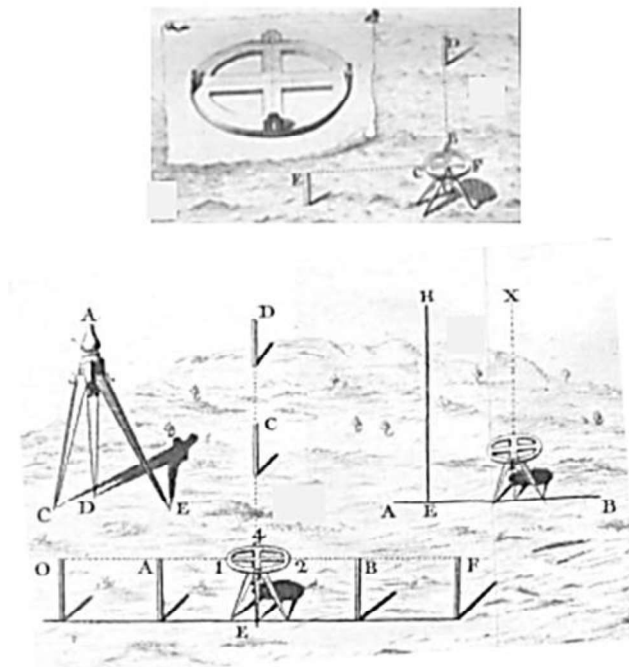


Ilustración de Bails, para explicar cómo se podrían sortear obstáculos al materializar una alineación.

Bails se refirió después al *cartabón* o *escuadra de agrimensor*, un instrumento “de mucho uso para trazar perpendiculares en el terreno”. Básicamente se trataba de un círculo dividido en cuatro partes iguales por cuatro pínulas, situadas en los extremos de dos diámetros perpendiculares. Bails completaba la descripción de este aparato rudimentario, indicando que las pínulas se localizaban “bien remachadas en cuatro agujeros

cuadrados, y hendidas muy perpendicularmente, de modo que las hendiduras correspondan a las líneas que dividen el círculo en cuatro partes iguales; en el extremo inferior de cada hendidura suele haber unos agujeritos que sirven para ver mejor los objetos en el campo”. La descripción la acompañaba de un dibujo que servía para comprender mejor la posible verificación del instrumento. Aconsejaba Bails que se colocasen dos jalones verticales alineados respectivamente con los diámetros de la escuadra, a continuación se giraría esta para alinear cada jalón con el diámetro contrario; si la escuadra estuviese bien construida, se mantendrían las alineaciones. Bails aseguraba que bastaba con una comprobación, aunque añadiese que “bueno será verificarlos también, haciéndole dar a la escuadra la vuelta entera”.



La escuadra de agrimensor y su manejo. Ilustración de Benito Bails.

La escuadra solía colocarse en estación encastrada, por medio de una virola, en un bastón “de unos cinco pies de alto, y como de dos pulgadas de diámetro. Por la parte de abajo ha de tener este pie una punta de hierro, y por la de arriba ha de estar guarnecido de latón, para que encaje firmemente en las virolas de la escuadra o de los otros instrumentos que se le quieran aplicar”; el bastón era sustituido por el trípode convencional, cuando la consistencia del terreno impedía que se clavase. He aquí como explicaba Bails el trazado de perpendiculares:

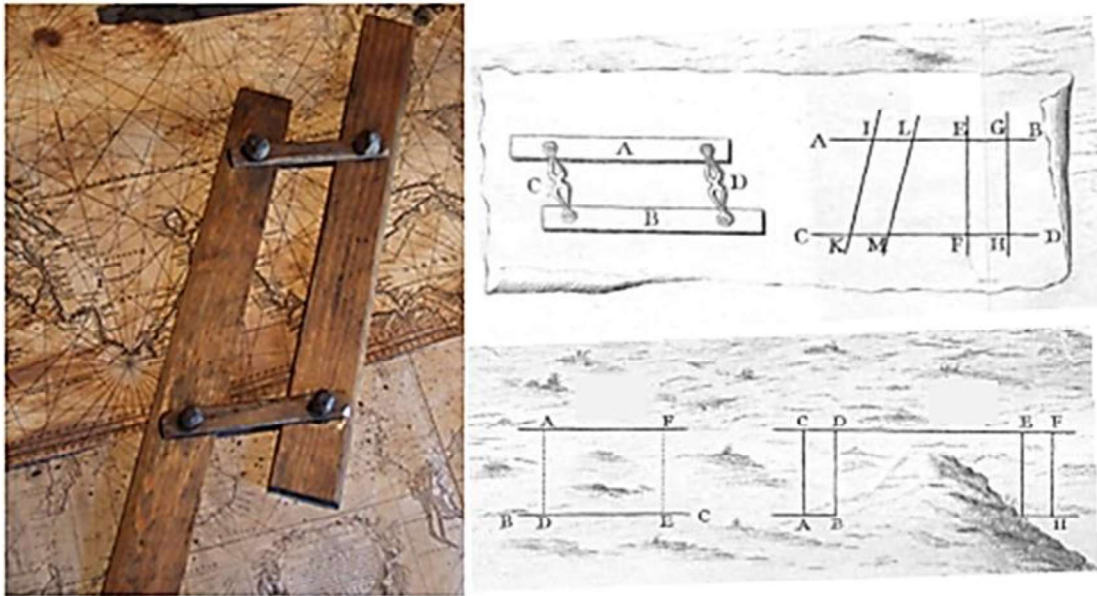
“se plantará el pie del cartabón en el punto E, alineando el extremo superior con la línea BA u OF, después se pondrá el cartabón de modo que por el rayo visual que pasa por las pínulas 1 y 2, se vean igualmente al uno y otro lado los jalones A y B; se enviará después un peón para que tenga en el punto C a su derecha un jalón, se le hará seña de que le arrime o le aparte de sí hasta que el pie esté en medio del rayo visual que pasa por las otras dos pínulas 3 y 4, y después se le afirmará. Hecho esto, se mirará por las mismas pínulas para que la cabeza y el pie del jalón se pongan en medio del mismo rayo visual, treinta pasos más allá se plantará otro jalón D del mismo modo. La línea CD se podrá proseguir, y será perpendicular a la base AB, si fuere exacto el cartabón”.

Si el punto desde el que se quisiera trazar la perpendicular no perteneciera a la recta, se procedía por aproximaciones sucesivas. Una primera estación²⁹⁴ de la escuadra se situaría, a estima, en el pie de la perpendicular y se comprobaría si el diámetro correspondiente pasaba cerca del punto considerado. Acto seguido se trasladaría la estación en el sentido conveniente, avanzando o retrocediendo, “lo que fuese menester, haciendo la misma prueba hasta encontrar con el punto E, desde el cual se podrá tirar la perpendicular EH”.

Bails completó su estudio sobre las alineaciones recordando la facilidad con que se podían dibujar líneas paralelas en el plano, gracias a un instrumento matemático poco conocido, la doble regla articulada: “se compone de dos reglas paralelas unidas con dos hojas de latón, por cuyo medio las dos reglas se pueden arrimar o apartar la una de la otra, quedando siempre paralelas entre sí”. Si se tuviesen que trazar sobre el terreno, aconsejaba Bails que desde el punto externo a una dada se bajase la perpendicular correspondiente y que se procediese de la misma forma en otro punto de la recta, llevando la misma distancia anterior hasta otro punto; de ese modo, la recta que uniese el segundo con el primero sería paralela a la dada. El mismo artificio era el recomendado cuando se quisiera prolongar una alineación más allá de un cierto obstáculo: “se levantarán las dos perpendiculares iguales AC, AD, se tirará la paralela CF, en la cual se tomarán más allá del obstáculo los puntos E, F, desde los

²⁹⁴ Bails hacía ver la necesidad de que el cartabón y su pie estuviesen “muy a plomo, porque una corta inclinación ocasiona mucho error”.

cuales se bajarán las perpendiculares EG, FH iguales a las antecedentes; tirando la línea GH, será evidentemente la continuación de la línea AB”.



La doble regla articulada y su empleo en el plano. Se reproduce también la ilustración relativa al trazado de paralelas sobre el terreno.

El capítulo de la nivelación es uno de los más relevantes incluido por B. Bails en sus lecciones topográficas, puesto que gracias a ella se podía medir y representar el relieve terrestre; también debe tenerse presente que se trata de una de las operaciones topográficas más antiguas, por estar directamente ligada a la traída de aguas. Por medio de la nivelación se consigue evaluar la altitud, la tercera coordenada que, junto a la latitud y a la longitud, permite determinar la posición completa de cualquier punto de la superficie terrestre. La altitud se cuenta a partir de una cierta superficie de referencia, sensiblemente coincidente con el mar desde que fuese elegido como tal en el pasado siglo XVII. Bails no mencionó expresamente la altitud, aunque afirmase que “*dos puntos están a nivel* cuando están cada uno a igual distancia del centro de la Tierra, por lo que *está a nivel una línea* cuando está en la superficie de una esfera que tiene el mismo centro que la Tierra”. No obstante, ya había declarado antes que entendía por *línea horizontal* “una línea tirada en un plano que toca la superficie del mar, o paralela a dicho plano que llamamos *plano horizontal*, y llamamos *línea vertical* a la perpendicular a un plano horizontal”.

Como era práctica habitual, Bails insistía todavía en probar la esfericidad de la Tierra²⁹⁵, citando incluso la clásica experiencia del barco que se va acercando a la costa y de cómo son “los objetos más altos los primeros que divisan los que en él navegan”. Aprovechando que se refería a la esfericidad terrestre, Bails fijó el tamaño de nuestro globo por medio de los valores de su perímetro, diámetro, radio y desarrollos del grado, minuto y segundo:

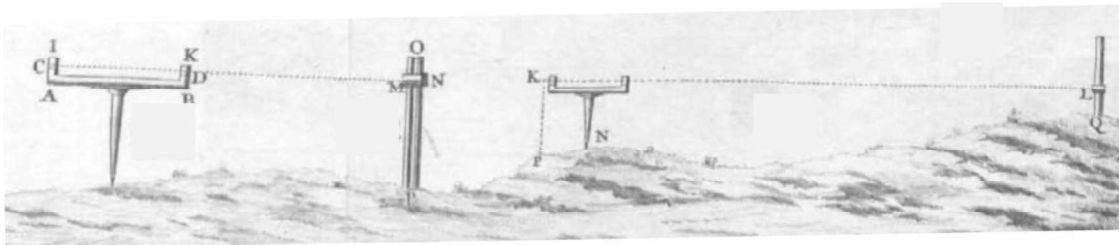
TAMAÑO DE LA ESFERA TERRESTRE, SEGÚN BENITO BAILS				
Arco	360°	1°	1'	1''
Toesas	20512440	56979	950	16
Varas	47862360	132951	2216	37
DIAMETRO Y RADIO				
Toesas	D = 6526685		R = 3263342	
Varas	D = 15228932 ² / ₃		R = 7614466 ¹ / ₃	

En el transcurso de la nivelación se van obteniendo realmente las diferencias de altitud, esto es los desniveles entre los diferentes puntos del terreno. Bails asoció de inmediato la esfericidad de la Tierra con el desnivel, considerando que la tangente a la superficie era la *línea del nivel aparente*; denominación adecuada, en tanto que al irse alejando del punto de tangencia el desnivel observado sería nulo, cuando realmente iría creciendo la latitud del punto elegido. En la figura siguiente, dibujada por Bails, el segmento BI sería precisamente la altitud del punto B, con relación a la superficie de referencia, con radio TD. Usando la terminología actual, ese mismo segmento sería la corrección por esfericidad que habría de sumarse al desnivel observado para obtener el verdadero. Bails llegó a cuantificarla, aunque se haya preferido expresarla ahora a la manera moderna; si en el triángulo rectángulo BTD, llamásemos c al segmento BI y R al radio de la Tierra, se verificaría la igualdad siguiente²⁹⁶: $DB^2 = (R + c)^2 - R^2 = c^2 + 2cR \approx 2cR \Rightarrow c = DB^2/2R$.

Bails explicó también el procedimiento trigonométrico clásico que permitía calcular el desnivel entre dos puntos dados, A y B, “que no están en la línea

²⁹⁵ Añadía Bails que “para inteligencia de lo que sobre este punto nos toca declarar, es indispensable saber que la Tierra es un cuerpo redondo o tan parecido a una esfera, que si en algo discrepa de la figura de este sólido, es tan corta la diferencia, que en nada puede alterar las consecuencias que de su perfecta redondez inferiremos respecto de la nivelación”.

²⁹⁶ La simplificación introducida al desprestigiar c^2 está permitida, ya que por ser c una cantidad pequeña su cuadrado sería todavía menor.



Ilustraciones de Benito Bails para explicar el cálculo del desnivel entre dos puntos.

Bails propuso como alternativa tres tipos de niveles, a saber: nivel de aire, nivel de albañil y nivel de agua. El funcionamiento del primero era obvio: “el nivel de aire que se compone de un tubo lleno de espíritu de vino²⁹⁷, en el cual se deja una ampolla de aire que se manifiesta en medio C del tubo, cuando está a nivel y en dirección horizontal el instrumento”. El segundo no es más que un triángulo rectángulo isósceles, sin base, y con un arco graduado comprendido entre sus dos lados²⁹⁸:

“desde el vértice cae una línea perpendicular a la base que va señalada en el arco del triángulo. En el extremo de esta línea se cuelga un plomo, cuyo hilo corresponde exactamente con dicha línea cuando está en situación horizontal la base del instrumento. Determina esta nivel mejor que el de aire la cantidad de la inclinación de un plano que no sea paralelo al horizonte, porque las divisiones del arco señalan de qué cantidad se aparta el plomo de la vertical”.

Lo más interesante de este capítulo de Bails es el detallado resumen que hizo de la nivelación hidrostática, cuyo instrumento fundamental fue el celebrado nivel de agua. La versión topográfica de tan antiguo aparato fue perfectamente descrito por nuestro autor: “consiste de un tubo hueco de hojalata u otro metal doblado en A y B. En los tubos AC, BD, se introducen otros dos de vidrio I y K, pegados con betún el uno en AC, el otro en BD. Debajo y en medio del tubo AB hay una virola para colocarle en su pie. Se llena de agua todo el tubo hasta que suba a la altura de 2 o 3 pulgadas en los dos tubos de vidrio. La línea CD que pasa por la superficie del agua en ambos tubos IA, KB, es una línea horizontal”. Complemento indispensable del mismo fue una tablilla o mira móvil, de cartón u hojalata, que se colocaba en el extremo de una regla. La mira, de un pie cuadrado, estaba dividida en dos partes iguales, la superior en blanco y la inferior en negro. La regla se introducía en un estadal dividido en pies, pulgadas y líneas, de modo que “haciendo correr la regla por el rebajo, se colocará la línea de mira donde se quiera y convenga”.

Bails fue sumamente didáctico al indicar el procedimiento a seguir para calcular el desnivel entre dos puntos P y Q, con una sola nivelada:

²⁹⁷ Antiguamente se creía que el vino había una componente volátil que influía positivamente en el ánimo del consumidor, de ahí la denominación de espíritu.

²⁹⁸ Este instrumento ya fue usado por los egipcios y copiado luego por los romanos.

“se planta el instrumento en N, el que hace la operación envía un peón a que plante en Q, lo más perpendicular que pueda, un estadal dividido, como se ha dicho, en pies, pulgadas y líneas, que mantiene firme con la mano izquierda, y en la derecha tiene la mira para subirla o bajarla a lo largo del estadal, según se le avise por señas. El que tiene a su cargo hacer la nivelación, mira horizontalmente por la superficie del agua hacia el estadal, y hace seña al peón para que pare la mira en el punto L donde remata el rayo visual KL. Hecho esto, mide la altura QL que supondremos de 1 pie 3 pulgadas: se mide la altura KP que supondremos de 4 pies 6 pulgadas: se resta la menor de la mayor, y la diferencia 3 pies 3 pulgadas manifiesta la cantidad de que dista más del centro de la Tierra un punto que el otro, o de que está más elevado uno que otro sobre el horizonte”.

Bails creía que si la distancia entre los puntos, de los que se pretendía hallar el desnivel, estaba comprendida entre 700 y 750 pies, podía suponerse insignificante la corrección por esfericidad, es decir que el desnivel aparente coincidiría con el verdadero. Si la distancia fuese mayor habría que efectuar más de una nivelada, salvo en los casos en que se pudiera estacionar el nivel en el punto medio y se continuase cumpliendo la limitación anterior. Bails detalló esa posible nivelación por el método del punto medio:

“supongamos, por ejemplo, que se hayan de nivelar los dos puntos A y B que distan uno de otro 1540 pies. Se plantará el nivel en C, a la mitad de la distancia AB con poca diferencia; se mirará desde D a E, y supongo que remata el rayo visual en el punto G, cuya altura es de 2 pies 4 pulgadas. El que nivela pasará al otro lado para mirar desde E a D, donde habrá otro peón con otro estadal,..., y supongo que remate el rayo visual en el punto F. Se medirá AF, que supondremos de 9 pies 6 pulgadas; se restarán de esta cantidad 2 pies 4 pulgadas que son la altura del punto G: la diferencia 7 pies 2 pulgadas manifestará que el punto A está más bajo que B de la misma cantidad”.

En los casos en que la distancia involucrada fuese mayor, se dividiría en tramos de 1500 pies y se aplicaría el procedimiento anterior, situando el nivel en la mitad de cada tramo. Bails explicó cómo se deberían ir anotando en el cuaderno de campo (“el libro de memorias”) las lecturas de espalda y de frente efectuadas sobre cada uno de los estadales, y que concluida la operación se deberían sumar las lecturas de espalda por un lado y las de

frente por otro, de manera que el desnivel entre los puntos extremos, A y B, sería la diferencia entre dos resultados obtenidos. El caso más general de esa nivelación compuesta, también fue contemplado por Bails: “cuando es mucha la distancia entre los dos términos, suelen encontrarse subidas y bajadas que hacen más embarazosa la nivelación. En este caso es preciso apuntar en un libro de memorias todas las subidas en una columna que llamaremos la *primera columna*, y en otra *segunda* las bajadas, conforme vamos a declarar”. La casuística de la operación no es más que una repetición de lo ya comentado con relación a la nivelación simple (de una sola nivelada), con la salvedad de ir anotando en cada columna la lectura del estadal que le correspondiera.

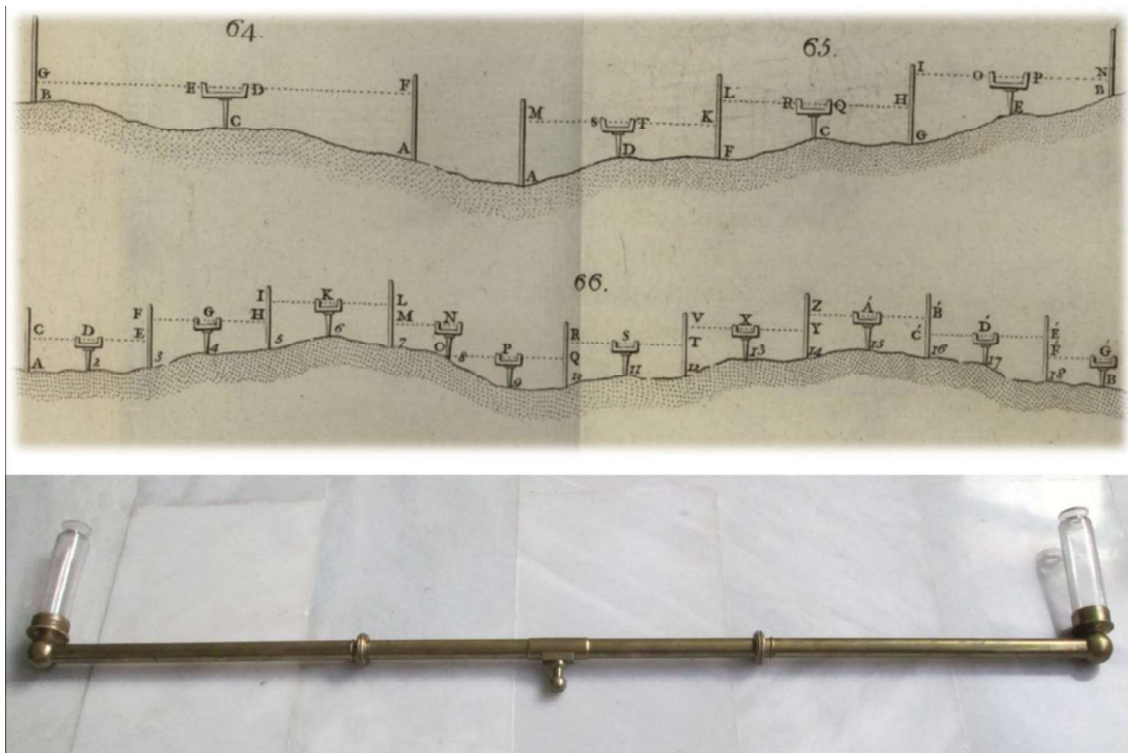


Ilustración de Bails para explicar la nivelación por el método del punto medio, en una nivelación simple y en otras compuestas. Se acompaña también un magnífico nivel de agua conservado en el Museo del Instituto Padre Suarez (Granada).

No obstante, con la intención de no dejar nada al azar, particularizó la nivelación para el supuesto de una cuesta muy empinada:

“sería mucho mejor hacer la operación cuesta abajo hacia cada uno de los dos términos, empezando por la cumbre, apuntando en la primera columna todas las alturas que se determinaren hacia un término, y en la segunda todas las que se determinaren yendo hacia el otro. Supongamos, por

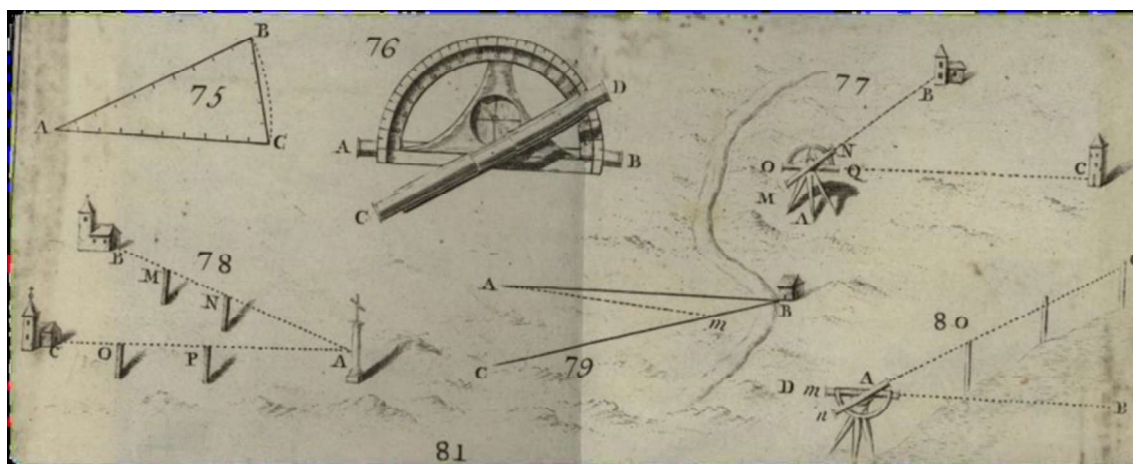
ejemplo, que habiéndose de averiguar la diferencia de altura de los dos puntos A y B, haya muchas estaciones que hacer, y por consiguiente que perder mucho tiempo. Se empezará desde el punto 6, cumbre de la altura, nivelando desde 6 hacia A, y apuntando en la primera columna las alturas que salieren; después se proseguirá nivelando desde 6 hacia 9, apuntando en la segunda columna las alturas que se hallaren. Se pasará el nivel al punto 15 para nivelar primero hacia 9, y después hacia B. Se restará la suma de las alturas de una columna de la suma de las alturas de la otra, y expresará su diferencia la que se busca entre el nivel de los dos términos propuestos. Esa práctica ahorra mucho tiempo, porque si fueren dos para nivelar, mientras nivela uno desde 6 hacia A, podrá nivelar el otro desde 6 hacia 9”.

El siguiente capítulo de estas lecciones de topografía se centró en la medida de ángulos. En primer lugar se hizo uso del transportador, o semicírculo graduado en palabras de Bails: “cuando es muy grande se divide en medios grados y aún en cuartos de grado, tiene los grados señalados de diez en diez...El centro está señalado con una línea recta y el otro lado está a modo de chaflán”. Si el ángulo que se quisiera medir estuviera sobre el terreno, el goniómetro por excelencia de la época era el grafómetro²⁹⁹, otra especie de semicírculo transformado, provisto de cuatro pínulas, “dos de las cuales A y B están en los extremos de su diámetro inmóvil AB,..., las otras dos pínulas C y D están en los extremos de una alidada móvil CD, por medio de un eje que está en el centro del instrumento”. En su versión más moderna, como recogía Bails, llevaba dos anteojos “de larga vista, de los cuales uno está inmóvil sobre el diámetro del instrumento, y el otro sirve de alidada móvil. Los grados del semicírculo están señalados de dos modos opuestos desde la unidad hasta 180°. En cada extremo de la alidada móvil está señalada la línea diametral con una flor de lis, y sirve para señalar los grados. Al lado de esta línea hay doce divisiones iguales...y sirven para distinguir los minutos de 5 en 5”.

El manejo del grafómetro era muy sencillo, tal como revelaba Bails con el ejemplo siguiente: “para medir el ángulo BAC...plántese el pie del instrumento en el punto A, donde concurren las direcciones de los objetos B y C. Póngase después a nivel el instrumento, y diríjase el rayo visual OQ

²⁹⁹ Bails dio más detalles de este instrumento en el primer tomo de sus Principios de Matemática (*Del Grafómetro, del modo de usarle y verificarle*, pp.326-330).

del anteojo inmóvil a uno de los objetos como a C, antes de apretar el tornillo de choquezuela, póngase después el anteojo móvil MN fijo en la dirección del otro objeto B, y cuéntense los grados comprendidos entre NQ”. Bails contemplaba la verificación de la medida así efectuada: “después de apuntado este ángulo, vuélvase a ver, antes de mudar el instrumento, si los dos rayos visuales se dirigen exactamente a las dos líneas que forman el ángulo, y verifíquese si está apuntado correctamente para asegurarse de que no se han movido las alidadas con el sombrero o por otro accidente”.



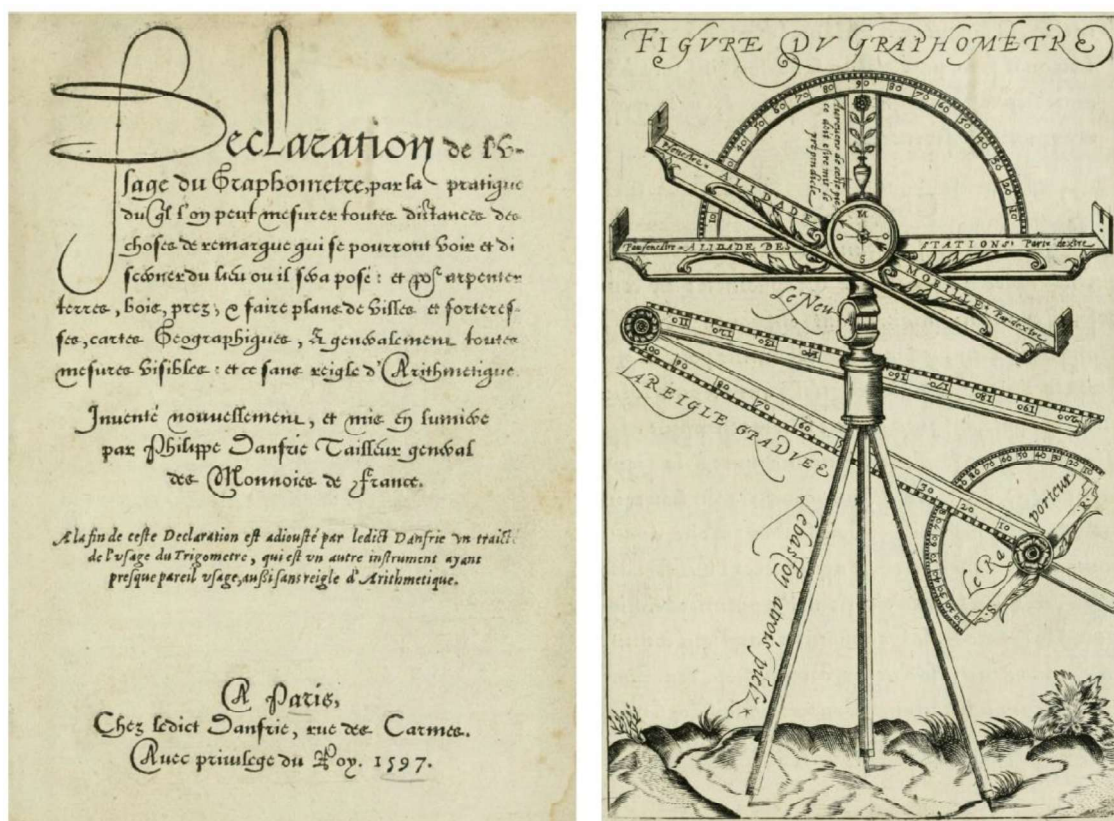
El grafómetro de doble anteojo y su aplicación en la medida de ángulos: horizontales y verticales. Ilustraciones de Benito Bails.

Bails expuso tres ejemplos para que el lector pudiese familiarizarse con su manejo. En el primero de ellos pretendía medir el ángulo formado por dos campanarios y una cierta señal, en la que no podía estacionarse el instrumento. La solución se apoyó en la materialización de las dos direcciones con sendas parejas de jalones. Acto seguido se colocaría el grafómetro en cualquiera de los más próximos a la señal y se mediría el ángulo formado por el aparato, la señal y el mojón de la otra alineación, tal como mostraba Bails en la figura con que acompañaba su explicación.

El segundo ejemplo fue similar al previo, ya que se tenía que medir un ángulo ABC, cuyo vértice estaba situado en un río o en cualquier otro lugar en donde no se pudiese estacionar el grafómetro. Bails recurrió a la elección de un punto auxiliar m en uno de los lados³⁰⁰, sobre él se colocaría

³⁰⁰ Sorprende un tanto que Bails recurriera a un procedimiento en el que se requería el conocimiento de dos distancias, cuando solo se podría haber resuelto con medidas angulares. En efecto, eligiendo dos puntos auxiliares A' y C' , en las rectas AB y CB, se podrían haber medido los ángulos $BA'C'$ y $A'C'B$, de manera que el ángulo ABC sería igual a 180° menos la suma de los dos anteriores.

el instrumento para medir el ángulo AmC , aunque luego hubiese que determinar también las distancias Bm y AB . Aplicando después el teorema del seno al triángulo ABm , resultaría: $\text{sen } AmB / AB = \text{sen } BAm / Bm$, de donde se podría deducir el valor del ángulo BAm ; como bien apuntaba Bails, el ángulo pedido ABC sería la diferencia $AmC - BAm$, puesto que la suma de los ángulos del triángulo valía 180° .



La primera descripción del grafómetro en la obra de Philippe Danfrie (1597): Déclaration de l'usage du graphometre.

El tercer ejercicio demostraba que el grafómetro se podía usar además para medir ángulos verticales. Para ello debería colocarse el instrumento en situación vertical, “por medio de un plomo que está colocado en su centro. Cuando el hilo del plomo rasa con el borde del instrumento y corresponde a 90° , está el grafómetro en la situación que corresponde”. Una vez estacionado, no podía ser más evidente la medida del ángulo formado por una cierta ladera con el plano horizontal: “colóquese el grafómetro al pie de la cuesta en la dirección AD ...levántese después la alidada móvil hasta que por ella se vea la cabeza del jalón que está en lo alto de la cuesta; el arco mn expresará el valor del ángulo mAn igual al ángulo CAB ”.

Las medidas lineales venían siendo complemento de las angulares en la mayoría de las operaciones topográficas, de ahí que Bails las analizase a continuación de estas. Primero se refirió a las que se efectuaran sobre la representación cartográfica, apoyándose en las escalas gráficas³⁰¹ o pitipies que generalmente llevaba incorporadas. Una vez explicada la formación de la regla de la escala y su división en partes iguales, así como la subdivisión de cada una de ellas en otras tantas, indicó como se podría medir con ella un cierto segmento: “Cuando ocurra tomar en esta escala un número determinado de partes, pongo por caso 37, se pondrá una punta del compás sobre las decenas en 30, y la otra sobre las unidades en 7, y esta abertura cogerá 37 partes”.

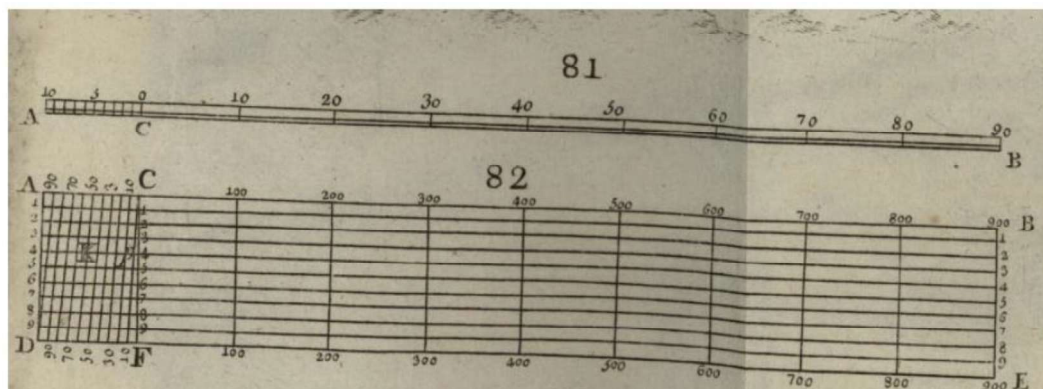
También aclaró Bails como podía construirse una escala, partiendo de una longitud dada, DE. Primeramente se formaría el rectángulo ABDE, trazando las perpendiculares iguales AD y BE; acto seguido se dividiría cada una de ellas en diez partes para unir las con paralelas a la línea maestra AB. Asimismo se dividiría esta en diez partes iguales, al igual que la DE, procediendo luego a la unión de las divisiones correspondientes. La fase final de la construcción la resumía Bails del modo siguiente:

“desde una de las divisiones de AC, por ejemplo desde 90, tírese a la inmediata sobre DF que es 100, una línea recta y después por todas las demás divisiones de AC tírense paralelas a dicha primera línea, que serán oblicuas a AC; señálense sobre las divisiones de CB y FE 100, 200, 300 & y sobre las divisiones de AC y DF señálense las decenas 10, 20, 30, &. Finalmente sobre las divisiones de AD señálense las unidades 1, 2, 3, 4, & y estará hecha la escala”.

El manejo de esta se facilitaba con los ejemplos propuestos Por Bails. Con el primero se pretendía medir sobre la escala una distancia dada:

³⁰¹ Siendo la utilidad principal de estas escalas la medida de distancias en el mapa, posibilitando la obtención de su equivalente sobre el terreno, no debe de olvidarse otra más sutil: conseguir que la alteración del papel no influyera sobre el resultado de la medición. Por otro lado, cuando las habilidades del cálculo se fueron extendiendo entre los posibles usuarios, surgieron las escalas numéricas como expresión analítica de las anteriores. Unas y otras no son más que relaciones de semejanza entre el dibujo y la realidad, como tales tendrán la forma de una fracción en cuyo numerador figurará la dimensión del segmento en el mapa, figurando en el denominador la de su homólogo del terreno. En las escalas decimales el numerador es la unidad, siendo el denominador un número entero (el 1, 2, 5 y 25 son los más habituales) seguido de ceros. El siguiente ejemplo es muy elocuente: si se quiere averiguar la escala de un mapa en que 35 cm equivalen a 87.5 km, la relación de semejanza sería $35 \text{ cm} / 87.5 \text{ km} = 35 \text{ cm} / 8750000 \text{ cm}$. Dividiendo el numerador y el denominador por 35, resultaría $1/250000$.

“supongamos que se pidan 54 partes³⁰², busco en la línea AC la división 50, y en la línea CF la división 4. Pongo una pierna del compás en K donde concurren estas dos divisiones, y la otra en 4. El intervalo K4 vale las 54 partes que se pidieron”. El siguiente ejemplo trataba de averiguar la medida de un segmento marcado sobre la escala: “se tomará esta línea con el compás, poniendo una pierna en la línea CF, y dirigiendo la otra hacia AD, para ver en qué transversal cae; y suponiendo que caiga en el punto K, será señal de que la línea dada vale 54 partes de AC”.



Construcción y manejo de la escala gráfica, según Benito Bails. Se acompaña también uno de los muchos pitipiés con que adornaron sus mapas el cartógrafo holandés Willem Janszoon Blaeu, o sus hijos Johannes y Cornelius; obsérvese que los personajes sostienen un compás y una cadena de agrimensor.

Cuando las líneas se medían sobre el terreno, era frecuente el uso de la cuerda, aunque Bails hiciese ver sus muchas limitaciones³⁰³ y sugiriera

³⁰² Se entiende que las partes eran de la línea DE, imagen de las varas, pies o cualquier otra unidad lineal de medida.

³⁰³ “la cuerda suele encogerse con la humedad, necesita de cierta preparación para poderla usar con toda confianza. Aconsejan algunos que se tuerzan hacia distintos lados las hebras con que se quiere hacer la

también el empleo de una *cadena*³⁰⁴ “compuesta de varios eslabones, cada uno de una medida determinada, pongo por caso de un pie, se le pueden dar a la cadena treinta pies de largo y bueno será hacerla de alambre que no sea muy grueso, a fin de que no incomode por muy pesada”. Sabedor Bails del grave inconveniente ocasionado por el pandeo, proponía sostener la cuerda, o la cadena, con una especie de aspa de madera clavada en el suelo, similar a la del croquis con que ilustró su explicación: “porque está averiguado que un hilo de 24 pies de largo, que pesa $161 \frac{5}{6}$ granos³⁰⁵, y cuyo diámetro es de $\frac{1}{33}$ de pulgada, puesto tirante en dirección horizontal, con una fuerza de 10 libras, padea en el medio línea y media”.

En aquellos casos en que se requería cierta exactitud, recomendaba Bails que se unieran los extremos de la línea con una cuerda tirante, o bien que se colocasen piquetes intermedios y se uniesen estos. Seguidamente se tomarían dos patrones de la misma longitud, por ejemplo de 10 pies. Se necesitaría también el concurso de varios operadores, ya que cada patrón sería llevado por dos hombres, “y se le darán al primero de los que llevasen la segunda medida diez piquetes. Finalmente el Medidor ha de tener un libro de memorias”. Al iniciar la medida, los que llevaran el primer patrón lo aplicarían a lo largo de la cuerda en el extremo de la línea y los que llevasen el segundo la aplicarían

“incontinenti a lo largo de la cuerda inmediatamente a continuación de la primera. El peón que va delante dejará entre los dos primeros uno de los piquetes que tiene en la mano, y le cogerá el que lleva la otra medida. Se proseguirá aplicando de este modo la primera y la segunda medida hasta el otro extremo de la línea, y cuando el que llevaba al principio los diez piquetes, hubiese dejado el último, el que lleva el libro de memorias se los volverá todos, y señalará en el libro el número de veces que hubiere vuelto los piquetes, que valen cada una diez veces las medidas o cien pies”.

La medida de la línea se efectuaba varias veces, como recomendaba Bails, para promediar luego los resultados obtenidos. Entre las razones esgrimidas

cuerda: que se le eche en aceite hirviendo, y en estando seca la pase por cera derretida, y por fin se la encere. Se asegura que una cuerda preparada de este modo no se encoge aunque esté un día entero dentro del agua”

³⁰⁴ Es extraño que Bails no mencionase la cadena de agrimensor inventada por el matemático inglés Edmund Gunter en el siglo XVII. Tenía 66 pies de largo, y 100 eslabones de 7.92 pulgadas.

³⁰⁵ Unidad de masa en el sistema anglosajón, equivalente a 0,06479891 gramos.

por él destacaba el hecho de que nunca pudiesen ser iguales varias medidas, porque tampoco estaría igual de tirante la cuerda o la cadenilla en cada caso. También hacía ver que por ese motivo el resultado de la medida siempre sería mayor del debido³⁰⁶: “se evidencia que la medida de una línea que más se arrima a su verdadero valor, es la que se saca teniendo muy tirante la cuerda o la cadenilla. Por consiguiente cuando se toma dos veces la medida de una misma línea, y salen desiguales sus valores, se ha de preferir el menor”.



Croquis de Benito Bails, con la cadenilla y la cuerda, y una de las cadenas fabricada por el matemático e inventor inglés Edmund Gunter. Se reproduce también la cubierta de su obra más relevante.

Tantos son los supuestos topográficos en los que puede intervenir la medida de una distancia, que Bails decidió hacer un amplio resumen convenientemente iluminado con un plano general³⁰⁷, en el que se representaron todos ellos. Cada uno de los ejercicios propuestos se resolvieron de varias formas: por medidas directas, por semejanza de triángulos o a través de las relaciones elementales de trigonometría plana. En el primero se pretendía *medir una línea accesible por uno de sus extremos*, resolviéndolo en principio por medio de la intersección directa

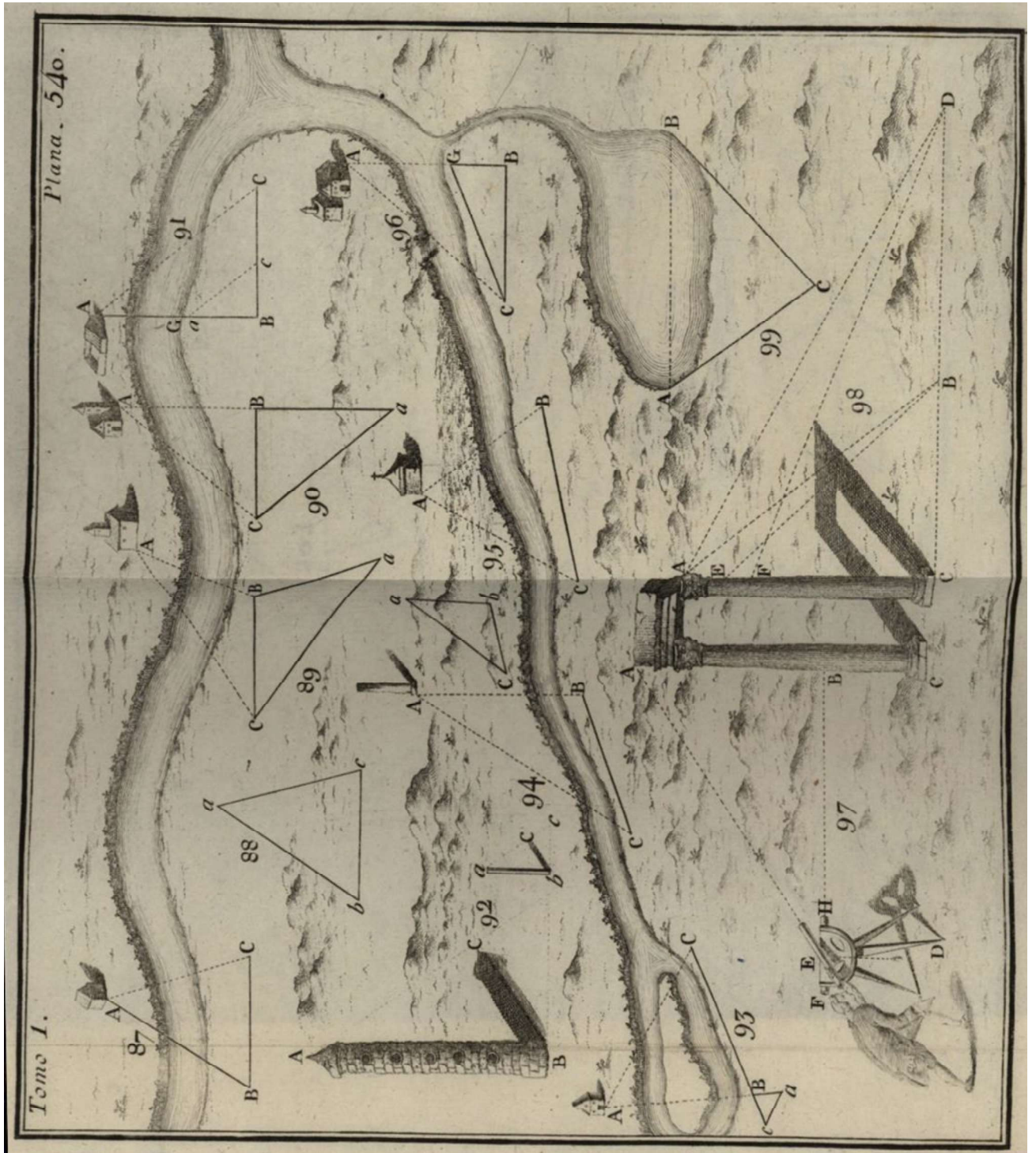
³⁰⁶ Bails también podría haber referido, como causa, la inadecuada alineación de los piquetes intermedios.

³⁰⁷ El plano general figuraba junto a la página 490 del tomo I de los Elementos de Matemáticas En él se identificaron 13 imágenes, numeradas del 87 al 99. Su motivo principal fue el bello trazado de un río, con dibujo de aguas incluido.

convencional: “desde su extremo B se tirará una base BC en un sitio donde se pueda medir, se imaginará la línea AC que concluya el triángulo, midiendo después la base BC y los dos ángulos B y C, se sacará el valor del lado propuesto AB”.

Otra posibilidad era la construcción, en su entorno, del triángulo *abc* “igual y semejante” al triángulo ABC, la cual no entrañaba dificultad alguna, puesto que se conocerían un lado y dos ángulos del mismo, “se medirá después el lado *ab*, que será igual a la línea propuesta”. Bails añadió también la posible construcción de dos triángulos rectángulos con un cateto común, que sería perpendicular a la línea que se quería medir: “tírese una base BC que forme un ángulo recto con la línea propuesta AB, prolonguese AB, y hágase el ángulo BC*a* igual al ángulo BCA; *Ca* encontrará AB prolongada en *a*, midiendo *Ba* será su valor el mismo que el de la línea AB”. La última solución prevista por Bails se basaba en la semejanza de triángulos: “si la línea AB tiene una parte BG accesible, se medirá una base BC que supongo sea de 60 varas. Se tomará *Bc* a arbitrio, de 15 varas por ejemplo, se hará el ángulo B*ca* igual al ángulo BCA; la línea *ca* cortará AB en *a*, (si estuviese *a* más allá de la parte accesible BG, se habría de tomar *Bc* más corta), después se medirá *Ba* que supongo sea de 19 varas, y se hará esta regla de tres:” $BC / Bc = BA / Ba \Rightarrow BA = (Ba / Bc) BC$. Sustituyendo valores resultarían 76 varas.

Una proporción similar sería aplicable cuando se quisiese obtener “*la altura AB de una pared o de una torre*, por medio de la sombra del Sol o de la Luna”. En efecto, colocando junto a la torre un jalón vertical, se podría obtener la sombra arrojada por el mismo; de manera que conocidas las longitudes de las dos sombras y la altura del jalón resultaría inmediata la del edificio. La longitud incógnita AB también se podría determinar trigonométricamente, como apuntaba Bails: “para hallar AB por trigonometría es preciso conocer la base que supongo de 60 v, los ángulos B de $64^{\circ} 3'$, y C de 54° . Entonces el tercer ángulo A que es su suplemento, será de $61^{\circ} 57'$; con cuyos datos se hallará el lado BA haciendo la siguiente analogía $\text{sen } A / \text{sen } C = BC / AB$, AB es el lado que se busca”. Bails olvidó concretar el resultado de esta nueva intersección directa, obvio por otra parte: despejando en la expresión anterior se obtendría $AB = BC \text{ sen } C / \text{sen } A$, sustituyendo valores se llegaría a que $AB \approx 55$ varas.



Bails insistió poco después en hallar la altura de un edificio, aunque en esta ocasión se necesitara usar el grafómetro. No obstante, tampoco era una operación complicada, ya que se trataba de hallar el desnivel entre el punto en que se estacionaba el instrumento y el extremo superior del edificio. Las distancias que intervendrían en el cálculo serían la altura del instrumento y la existente entre este y el pie del citado edificio. Bails explicó cómo podía hallarse la altura sobre el horizonte del extremo superior del edificio (la columna de la figura adjunta): “se colocará el grafómetro de modo que su plan esté vertical, y se dirija hacia el eje AC de la altura, y que su diámetro fijo HF esté horizontal...se pondrá el diámetro móvil en tal situación que por las pínulas o el anteojo que lleva, se vea la cumbre A del edificio. Se mirará después el instrumento cuantos grados coge el ángulo FEG, y los mismos cogerá su opuesto al vértice AEB”. La altura del edificio sería por tanto la siguiente: $AC = AB + BC = CD \operatorname{tg} AEB + ED$, siendo el segundo sumando la altura del grafómetro³⁰⁸.

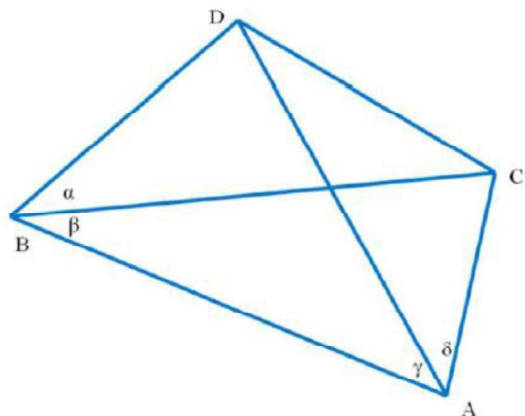
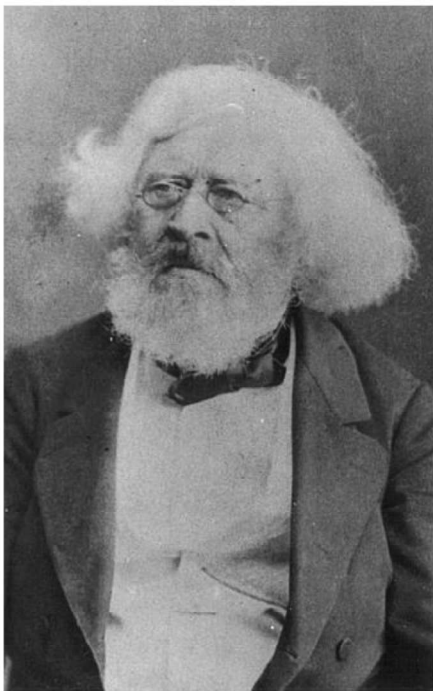
La última figura de la colección, presentada en la lámina anterior, se refería al caso en que la línea solo fuese accesible en sus dos extremos A y B. Bails resolvió el ejercicio eligiendo un punto complementario C, desde el que se trazarían las dos rectas AC y BC, aunque propusiera diferentes vías para determinar el valor buscado. Con la primera se medirían los ángulos en A y B, además de cualquiera de los lados AC o BC, para aplicar a continuación el teorema del seno, una vez obtenido el ángulo C como diferencia entre 180° y la suma de los otros dos ángulos del triángulo ABC. Los restantes procedimientos se basaron en la construcción de triángulos semejantes y en el empleo de la trigonometría, combinando algunas de las medidas ya comentadas.

Únicamente merece la pena destacar el caso en el que se pretendía medir una línea completamente inaccesible, puesto que Bails propuso para solucionarlo un método que recuerda al que sería conocido, años después, como problema de Hansen³⁰⁹: “se medirá una base CD que sea con poca

³⁰⁸ Curiosamente añadió Bails una figura que utilizó para alertar sobre la conveniencia de minimizar el inevitable error cometido “al tomar el ángulo de la altura, haciéndolo o mayor o menor de lo que es en la realidad, sea el menor que se pueda, y así de muy mermada la medida que se busca”. Esta figura, la número 98 de la lámina siguiente, jugó un papel importante en la historia de la geodesia, ya que el sabio al-Biruni la usó, en el siglo XI, para hallar la altura de la montaña desde la que midió la depresión del horizonte sensible y calculó el desarrollo del grado terrestre. En el libro *Forma y Dimensiones de la Tierra* (Ed. Del Serbal. 2000) se dan más detalles sobre el particular.

³⁰⁹ Denominado así en recuerdo del geodesta y astrónomo danés, del siglo XIX, *Peter Andreas Hansen*. Su prestigio como astrónomo fue innegable, baste decir que recibió dos veces (1842 y 1860) la medalla

diferencia, paralela e igual a la línea propuesta AB, por los extremos de esta base imagínense líneas tiradas a los extremos de la base AB y mídanse los ángulos en C y en D. Hecho esto se hallará la línea AB por uno de los cuatro métodos arriba aclarados”. La última consideración que hizo Bails, con relación a las mediciones previas, merece ser recordada por sus evidentes connotaciones geodésicas y cartográficas: “adviértase que en la elección de los puntos D, C, E se debe huir de formar triángulos, cuyos ángulos sean muy agudos, particularmente los que tienen sus vértices en los puntos A y B de la línea propuesta. Sirve esta operación para medir las líneas que están al otro lado de un río, de un precipicio, y la distancia de dos sitios apartados el uno del otro como de dos campanarios: sirve también de principio para levantar el mapa de un país”.



Peter Andreas Hansen y la representación de su problema: conocida la distancia CD, calcular el lado AB en función de los ángulos α , β , γ y δ . La solución se puede lograr por métodos analíticos y gráficos.

El último ejercicio que sugirió Bails, para completar este capítulo dedicado a las medidas lineales, pretendía averiguar la longitud de la cuesta en una montaña inaccesible, representada en una de las figuras incluidas en la

de oro de la *Royal Astronomical Society* y que se le ofreció suceder a Friedrich Georg Wilhelm von Struve en el Observatorio de Dorpat (Tartu) en 1829 y a Friedrich Wilhelm Bessel, en el Observatorio de Königsberg en 1847; en ambas ocasiones rechazó el ofrecimiento por preferir seguir siendo director del Observatorio de Seeberg (Gotha).

lámina que se reproducirá un poco más adelante. El problema era pues similar al que se planteó el sabio musulmán al Biruni, que acaba de ser referido. Ciertamente, según Bails se debería medir un segmento BM, próximo a su pie, que sería lado del triángulo formado por sus dos extremos y la cumbre de la montaña, además de los ángulos en sus vértices B y M; de esa forma sería obvio el tercer ángulo y podría determinarse el valor del lado AM. Seguidamente habría que medir una base MN, con la que se construiría el triángulo auxiliar DMN, del que se observarían también los ángulos en M y en N, pudiéndose obtener por lo tanto el valor del lado DM. Finalmente, en el triángulo ADM se conocerían dos lados y el ángulo comprendido, el suplemento del ángulo que se midió en M, con lo que se podría calcular el lado incógnita AD. Bails concluyó la operación hallando también la altura de la montaña, aunque apoyándose en los cálculos que acababa de efectuar y no en las únicas medidas angulares y lineales relativas al triángulo AMB, tal como hizo el astrónomo persa para calcular la de Nandana en Punjab (Pakistán).

Sentadas las bases angulares y lineales, ya estaba Bails en condiciones de explicar mejor los principios fundamentales del levantamiento topográfico, cuyo fin último era el dibujo de un plano en el que estuviere representada una cierta porción del territorio, a través de sus detalles planimétricos y altimétricos más significativos. El epígrafe elegido por este fue el *De las Figuras*, cuyo contenido abarcaría la esencia de su construcción por variados procedimientos, el mismo Bails aclaraba que se trataba de una operación similar a la ejecutaba el topógrafo al tener que dibujar en el plano la imagen de la que existía sobre el terreno: “porque como no es posible formar en el papel una figura igual a una casa, a una huerta, a una provincia, para enterarse de sus dimensiones han acudido los prácticos al artificio de imitar en pequeño las figuras cuyas dimensiones se quieren expresar. Siendo la figura pequeña semejante a la propuesta, se da noticia cabal de los ángulos y dimensiones de la primera, en virtud de las condiciones en que estriba la semejanza de las figuras”.

La construcción de figuras poligonales regulares no presentaba dificultad, ni tampoco la de polígonos con pocas irregularidades. El problema se planteaba cuando aumentaba sustancialmente la complejidad de la figura que debería ser representada. Bails lo solucionó recurriendo al conocido procedimiento topográfico de las abscisas y ordenadas, definiendo para

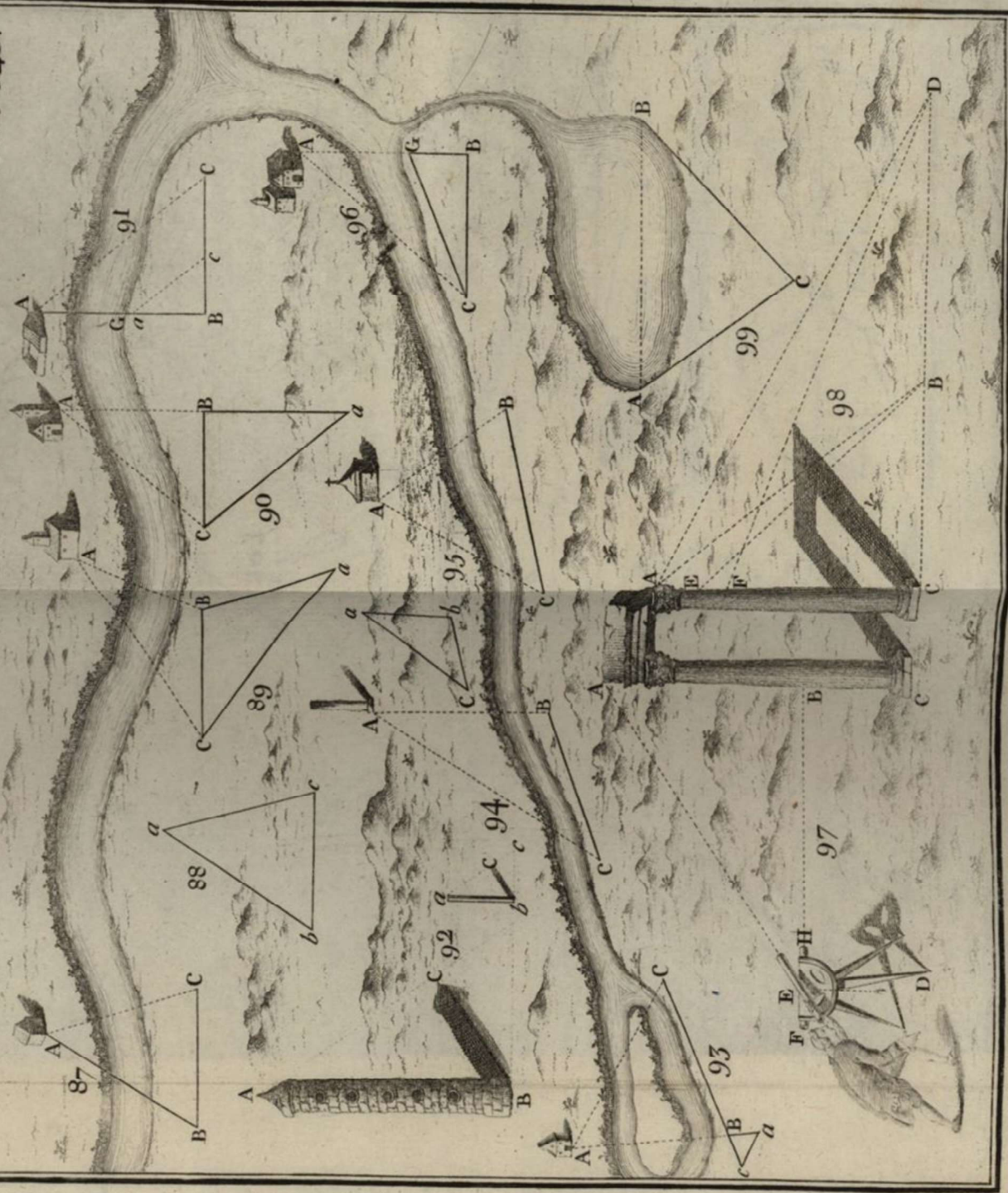
aplicarlo una especie de línea maestra, o base, con relación a la cual se localizarían todos los puntos perimetrales de la figura, por medio de sus dos coordenadas cartesianas. Así se expresaba el arquitecto:

“se puede tirar una línea AB al través de la figura según su mayor dimensión, y que pase por muchos de los puntos cuya posición se quisiere señalar: esta línea se llamará también *base*. Desde cada punto principal de la figura se bajarán perpendiculares a la base. Se tirará después separadamente una base indefinida *ab*, en la cual se señalarán las distancias de las perpendiculares, y a uno y otro lado se levantarán perpendiculares iguales a las de la figura propuesta, con lo que quedara señalada la situación de todos los puntos que determinan la figura igual que se busca”.

Cuando las ordenadas resultaban demasiado grandes, se podían considerar dos ejes perpendiculares para referir a ellos los vértices del polígono a representar. Otra de las posibilidades manejada por Bails fue la de formar triángulos con tres de tales vértices y usar sus lados como bases sobre las que proyectar la figura en cuestión.

El siguiente procedimiento, traído a colación por Benito Bails, fue el de la cuadrícula, la cual se dibujaría sobre la figura que se quisiera reproducir. Para lograrlo se construiría otra cuadrícula idéntica a la primera³¹⁰, para trasladar a ella los puntos determinantes de la figura origen, tal como se indicaba en el texto original: “señálense después, si fuere un mapa...los ríos, las costas, las ciudades, & en los puntos de los cuadrados correspondientes a los de la figura propuesta. Hecho esto, será fácil concluir el dibujo”. Aparte de la cuadrícula recordaba otros dos posibles procedimientos, el picado y el calcado. Para el primero recomendaba que se picase la figura “con un alfiler muy sutil en los puntos que sirven para determinarla”. Seguidamente se colocaba la figura sobre la lámina en que se quería dibujar, para pasarle el cisquero y conseguir el estarcido: “quitando la hoja picada, se hallará en la de abajo la figura formada con el cisquero: después se señalan estos puntos con tinta u otra cosa que permanezca”. Para el calcado se planteaban tres opciones, la del papel calco, la del pegado en un cristal bien iluminado y la del papel encerado, pero bien seco para no echar “a perder el dibujo sobre el que se aplicaría”.

³¹⁰ Además de recomendar que los cuadrados deberían ser lo menores posible, señalaba Bails que “para no echar a perder el dibujo original, se puede hacer la cuadrícula con hebras de hilo o seda que se aplican sobre la figura dada, haciendo una cuadrícula igual para la figura que se quiere sacar”.



En la práctica de la topografía, fueron de utilidad los mismos métodos que se acaban de referir, aunque se tratase ahora de *hacer una figura semejante a una figura dada*. Procediendo con el método de la cuadrícula, se trazaría una sobre el dibujo original y se construiría otra a diferente escala, para el nuevo dibujo que se quisiera realizar, sobre la que se irían localizando los puntos homólogos de la primera. Bails manifestaba que ese era la manera más frecuente de reducir mapas y planos. Cuando se había efectuado un levantamiento topográfico y se querían reflejar sus resultados sobre el plano, se trataba justamente de dibujar una figura semejante a otra, como precisaba el propio Bails: “consiste esta operación en determinar en el papel puntos que estén colocados los unos respecto de los otros, del mismo modo que lo están en el terreno los unos respecto de los otros, los objetos que dichos puntos han de representar”.

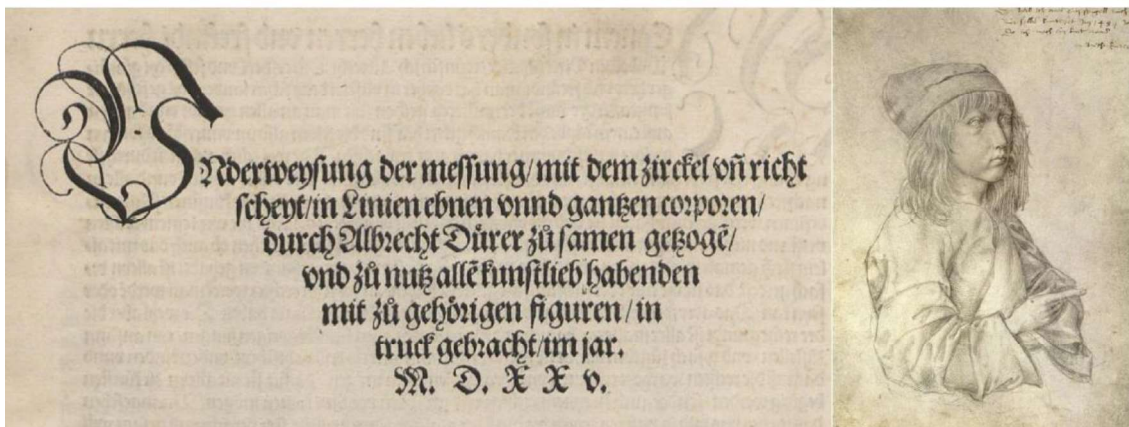
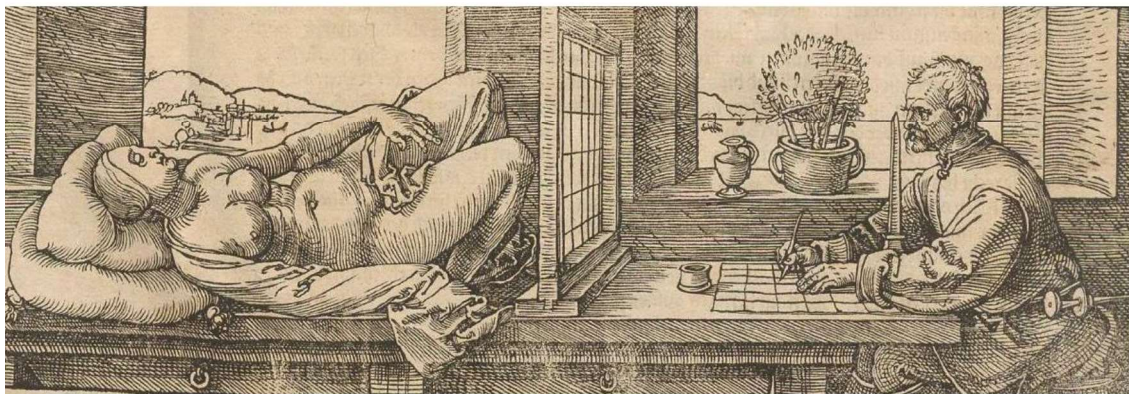


Ilustración de Albert Dürer en su trabajo, de 1525, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt* (*Instrucciones para medir con regla y compás*). En la parte inferior aparece la primera página de la obra y el autorretrato del autor, pintado a la edad de 13 años.

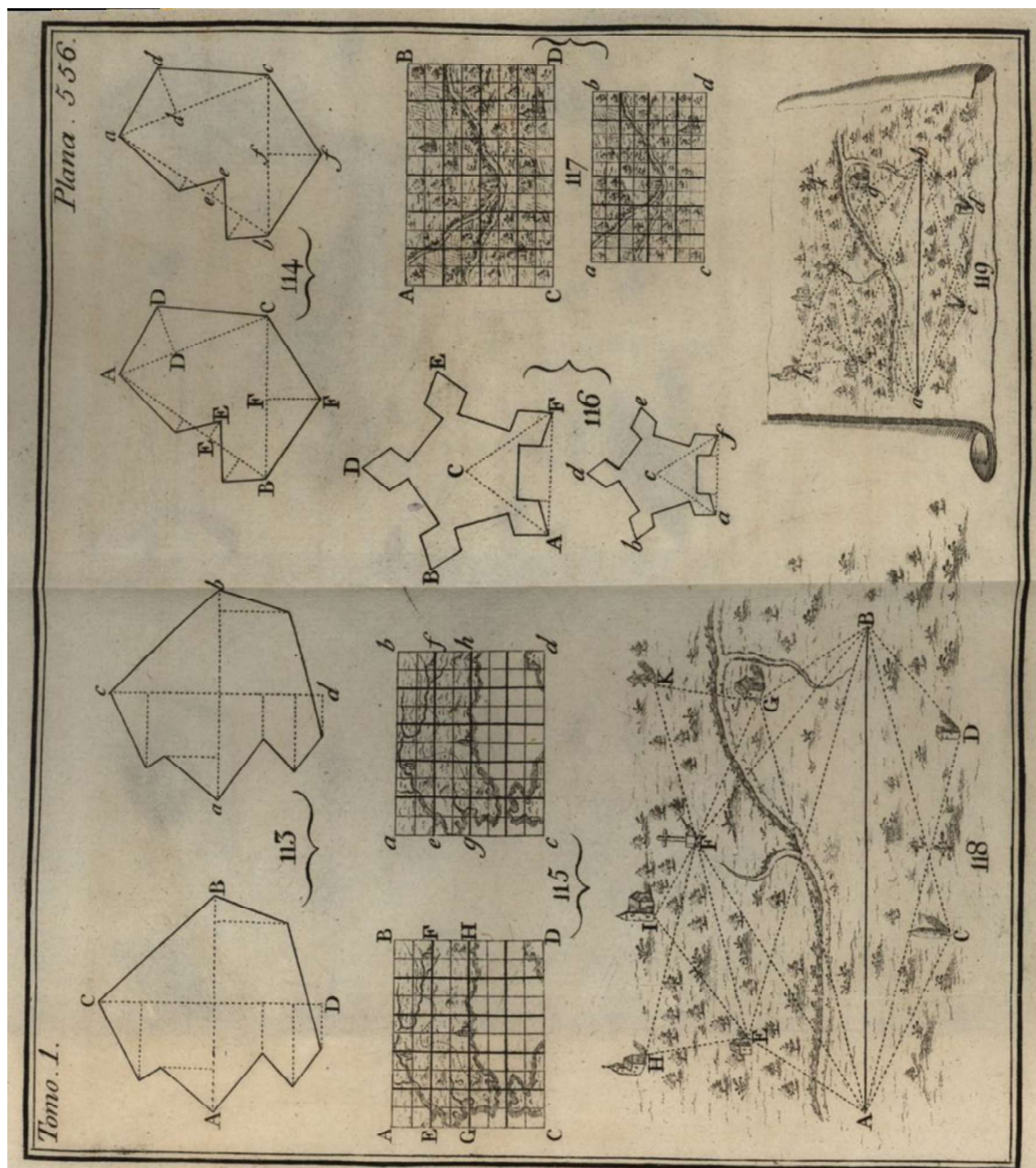
Aseguraba Bails que al realizar el levantamiento se supondría que todos los objetos a representar estaban proyectados sobre un mismo plano horizontal³¹¹. Conforme se iba reconociendo la zona se realizaría el preceptivo croquis para facilitar la posterior confección del plano, así lo expresaba Bails: “se dibujarán toscamente dichos objetos en un papel, dándoles las situaciones que a ojo parezca que tienen, a cuyo fin el que levantara el plan tendrá que ir a los diferentes sitios donde conviniere, para formar algún juicio de todos los objetos propuestos. Este primer dibujo, que se llama *borrador*, servirá para señalar las diferentes medidas que se tomarán en el discurso de las operaciones”.

La medición propiamente dicha no era más que una serie de intersecciones directas efectuadas con una base común AB, elegida de manera que “se pueda ver desde sus extremos el mayor número de objetos que posible sea”. En sus dos extremos se medirían con el grafómetro todos los ángulos necesarios para localizar los puntos visibles desde ellos: C, D, E, F y G. Si hubiese puntos “como H, I que no se pudiesen ver desde los extremos A y B, será menester pasar a dos puntos E y F observados antes, desde los cuales se puedan ver los dos objetos H e I”, procediendo de forma análoga con el grafómetro en sus dos extremos. Realizadas todas esas intersecciones, se habrían conformado una serie de triángulos ABC, ABD, ABE, ABF y ABG, de los que se conocerán la base AB, medida con la cadena, y los dos ángulos medidos en sus extremos. A partir de tales datos se podrían resolver, aplicando el teorema del seno, todos los triángulos y conocer en consecuencia el resto de sus elementos. Evidentemente, alguno de los lados así obtenidos servirían de base para las intersecciones posteriores.

Bails explicó asimismo como se dibujaría el plano correspondiente. Se comenzaría trazando una recta *ab*, cuya longitud sería la de la primera base, una vez reducida a la escala del plano. Para localizar cualquiera de los puntos visados, se tomarían los lados que los unieran a los extremos de la base y se reducirían igualmente a la escala elegida: “desde el punto *a* como centro y con radio igual a dicho número de partes, se trazará un arco...y desde el punto *b* como centro, y con un radio igual a dicho número de partes, se trazará un arco que corte el que se trazó en el punto *a*”. De ese

³¹¹ Más adelante explicaría como los ángulos medidos en un cierto plano se reducirían a uno horizontal, al igual que sucedería con las distancias.

modo se irían situando en el plano los puntos c, d, e, f y g , imágenes de los originales en el terreno; para hacer lo propio con h, i, k , homólogos de H, I, K, se trazarían los arcos desde los extremos de las otras bases elegidas, siendo sus radios los lados de los triángulos asociados a las mismas.



Como comentaba Bails: “con esto la figura trazada en el papel será semejante al terreno que se hubiere dibujado, pues se compondrá de igual número de triángulos que este,..., y colocados de un mismo modo, no faltará sino dibujar en cada uno de dichos puntos los objetos que se hubiesen observado en ellos, y las partes intermedias, que no piden tanta escrupulosidad, se colocarán por los medios que luego declararemos”. En efecto, Bails añadía que con tal proceder solo se fijaría la posición de los puntos fundamentales del plano, a la vez que apuntaba el tipo de goniómetro más recomendable: “es más del caso de un grafómetro con anteojos de larga vista que con pínulas”.

No obstante, si la exactitud requerida no era mucha y las distancias involucradas eran pequeñas, no resultaba indispensable la trigonometría para confeccionar el plano. Bails comentaba que en esos casos podían dejarse sin resolver los triángulos anteriores, ya que “basta formar dichos triángulos semejantes por medio de los ángulos conforme vamos a declarar”. Para localizar los puntos se seguiría usando la imagen *ab* de la base, aunque en cada uno de sus extremos se usaría el transportador para marcar la dirección angular del punto considerado; de modo que las intersecciones de las correspondientes serían los puntos del plano ya referidos.



Equipo topográfico del siglo XVIII: Grafómetro de doble antejo, con brújula incorporada, y cadena de agrimensor.

Bails reconocía que este último método era menos fiable que el del compás: “porque como el semicírculo graduado o, en general, el instrumento que sirve para formar en el papel ángulos iguales a los que se han observado en el terreno, no puede ser sino de un radio muy corto, no es posible formar dichos ángulos con la misma precisión que se mide con la escala el valor de los lados que se determinan por el cálculo”. Asimismo fijaba las directrices generales con las que se podría captar el resto de la información geográfica que completaría el plano: “después de determinados los puntos fundamentales de un plan por un método riguroso, se determinan los menos importantes, y se ejecuta el por menor del plan por otros métodos que bien que no sean tan exactos como el antecedente, son suficientes para los fines que en esta operación se suele llevar. Sirven para este fin dos instrumentos sumamente socorridos, es a saber la Brújula y la Plancheta”.

Al parecer fue el holandés Regnier Gemma (*Frisius*) el primero que comentó las posibles aplicaciones topográficas de la brújula, en la primera mitad del siglo XVI. Bails describió una genérica, indicando que el diámetro de su limbo graduado solía estar comprendido entre las 6 y las 12 pulgadas. En su perímetro estaban marcadas además las cuatro direcciones cardinales, “en el centro del expresado círculo se planta un eje...sobre el cual se coloca una aguja de acero imantada o tocada a la piedra imán muy en equilibrio a fin de que pueda dar vueltas con suma facilidad. Tapa todo lo dicho un cristal redondo afianzado en un rebajo hecho a intento alrededor del círculo, para impedir que el aire menee la aguja”.

Con el fin de que sus lectores comprendiesen la sustancia del instrumento, dio Bails unas ligeras nociones de magnetismo, comentando que la piedra imán tenía dos polos opuestos y que uno de ellos miraba constantemente hacia el Norte, mientras que el otro miraba al Sur; a la línea que unía ambos puntos la llamó meridiano. Sin embargo, no tardó en matizar esa afirmación: “pero no se dirige exactamente la aguja imantada hacia el Norte, ni tampoco se aparta de este punto del mundo de una cantidad invariable aún en un mismo lugar”. Bails se estaba refiriendo a la llamada declinación magnética, es decir al ángulo formado por el meridiano geográfico y su homólogo magnético³¹²: “sobre cuyo punto han andado

³¹² Bails quiso notificar los últimos avances en este campo, resumiendo lo recogido en el *Journal des Savans pour l'année MDCCLXXI (Aout. A Paris 1771)*, la primera revista científica publicada en Europa (Enero de 1665). Allí se daba cuenta de los experimentos realizados, al respecto, por comisionados de la

muy solícitos los Filósofos para indagar de cuantos grados era esta declinación en varios países, y si era hacia el Occidente o hacia el Oriente; y de sus observaciones ha resultado que es muy variable esta declinación, y que aún en un mismo lugar es en unos tiempos occidental y en otros oriental”.



Brújula topográfica con alidadas y plomada, colocada en su caja original. Este tipo de instrumento y la cadena de agrimensur fueron los más usados en América del Norte durante el siglo XVIII.

También apuntaba Bails que gracias a la brújula, y al valor de su declinación, se podían “orientar los objetos, o conocer con corta diferencia de medio grado su situación respecto de los cuatro puntos cardinales, o respecto de la línea Norte Sur, con la que forma constantemente la aguja el mismo ángulo en un mismo lugar, a lo menos en el discurso de un mismo año”. Varios fueron los procedimientos referidos por Bails para evaluar ese parámetro magnético. Como el grafómetro solía llevar incorporada una

Real Academia de Marina, concluyendo “1º que no varía la dirección de dos agujas, arrimándolas la una a la otra, cuando la línea que pasa por sus centros es la misma en que están las agujas, o es perpendicular a las agujas; en apartándolas de esta situación crece la declinación hasta que la línea que pasa por sus centros , forma un ángulo de 45º con las agujas o con una línea que las concibe tirada perpendicularmente. 2º que su acción mutua las desvía más de su primitiva dirección cuando una de las dos agujas está a Nordeste y la otra a Sudoeste, la una a Sudeste y la otra a Noroeste. 3º que puestas las brújulas en una línea indefinida tirada desde Sudeste a Noroeste, y estando a distancia de 2 pies 3 pulgadas una de otra, declinaban 3 grados y medio; estando a 1 pie 6 pulgadas, declinaban 7 grados y a la distancia de un pie declinaban 19 grados.

brújula, “se traza la línea Norte Sur de la brújula paralela al diámetro del grafómetro, porque como la base común de todos los triángulos observados es paralela a dicho diámetro, basta mirar que ángulo forma con la aguja imantada y será fácil averiguarlo dirigiendo la línea de fe de la alidada paralelamente a dicha aguja”.

El segundo método era esencialmente astronómico, aunque un tanto expedito, puesto que se trataba de materializar la meridiana del lugar como bisectriz del ángulo formado por direcciones solares correspondientes. En efecto, esta fue la recomendación de Bails:

“se trazará con jalones, o de otro modo, una línea que se dirija hacia el Sol cuando nace, y desde el mismo punto y en un mismo día se trazará otra línea que se dirija hacia el Sol cuando se pone: formarán estas dos líneas un ángulo que se dividirá en dos partes iguales por una línea que será la línea que llaman *meridiana*, si se tira una perpendicular a la meridiana, sus extremos se dirigirán a los puntos que llaman Oriente y Poniente. Las dos líneas que forman el ángulo que la meridiana parte por el medio, han de tener por lo menos 30 o 40 estadales de largo. Trazada la meridiana...será fácil averiguar la declinación de la brújula o de su aguja. Se colocará el instrumento de modo que la base de uno de los lados de la caja paralelos a la línea Norte Sur rase la línea meridiana hallada, en cuya situación la línea Norte Sur de la brújula será paralela a la meridiana; y estando así el instrumento, se mirará a que grado corresponde la aguja y restándole de 360, la resta expresará la declinación de la brújula”.

Bails terminaba su disertación sobre la brújula reconociendo su relevancia para completar los trabajos de relleno topográfico: “...solo sirve la brújula...para determinar los puntos menos esenciales de un plan, después de determinados por el método antecedente los de mayor entidad”. Incluso llegó a detallar las claves de un itinerario, para representar el curso de un río, con estas palabras:

“se plantarán piquetes en los recodos más reparables A, B, C, D, E, F. Se colocará la brújula en el punto A, se mirará hacia AB, se contarán en la graduación los grados que hubiere entre la línea AB, y la dirección actual de la agauja, y se medirá AB. Se colocará después la brújula en el punto B, se mirará hacia BC, se contarán también los grados que hubiere entre BC y

BN, que es la dirección de la aguja paralela a la primera dirección AN; se medirá BC y se repetirán estas operaciones en cada recodo”.

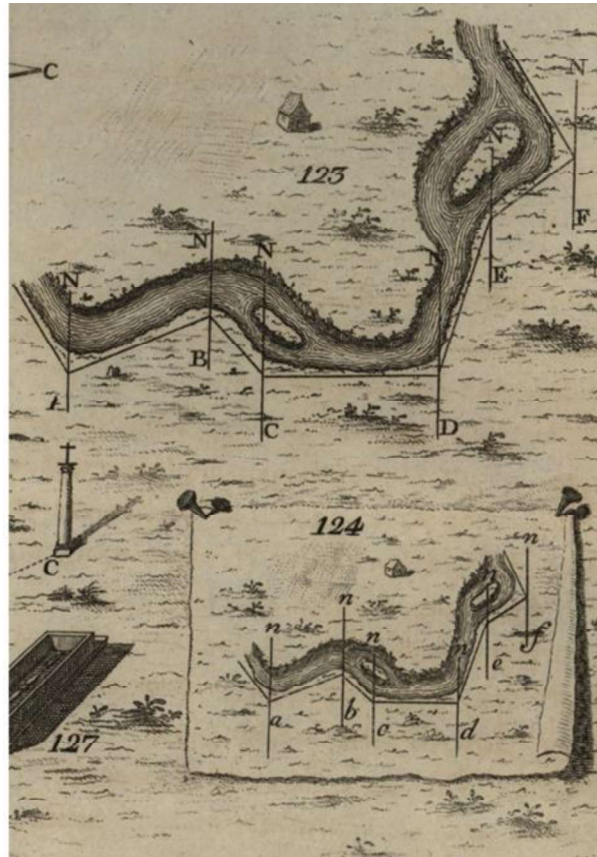


Ilustración de Bails para explicar la observación de un itinerario de brújula, a lo largo de un río, y su representación en el plano.

Los trabajos de gabinete eran, en cierto modo, repetición de los efectuados en el campo, pues el transportador sustituía al limbo de la brújula y la regla a la cadena, al dibujar una línea poligonal semejante al itinerario anterior. Así los resumía Bails:

“se escogerá a arbitrio el punto *a*, para que represente el punto A y se tirará a arbitrio la línea *an*, para que represente la dirección de la aguja imantada. Se formará en el punto *a*, por medio del semicírculo graduado, el ángulo *nab* igual al ángulo observado NAB y se le darán a *ab* tantas partes de la escala del plan, cuantas medidas cupieren en AB. Desde el punto *b* se tirará *bn* paralela a *an*, y se hará el ángulo *nbc* igual al ángulo observado NBC, y se le darán a *bc* tantas partes de la escala cuantas medidas cupieren en BC. Lo mismo se practicará respecto de todos los demás puntos”.

Ilustración de Bails para explicar la observación de un itinerario de brújula, a lo largo de un río, y su representación en el plano.

La primera descripción de la plancheta vio la luz al finalizar el primer tercio del siglo XVII, su autor fue el matemático alemán Daniel Schwenter en su magnífico libro *Geometriae practicae novae et auctae tractatus*, publicado en Nuremberg (1625). La ventaja más llamativa del instrumento la recordaba Bails al inicio de su exposición: “es muy acomodado porque pide poco aparato y al mismo tiempo que se observan los diferentes puntos cuya situación se quiere determinar, se van señalando en el plan sin perderlos de vista”. En sus primeras versiones no era más que una tabla cuadrada y horizontal, con un lado aproximado de varias decenas de centímetros, que se colocaba sobre un trípode: “sobre esta tabla se tiende una hoja de papel y se afianza por medio de un bastidor que coge todo el perímetro de la tabla”. Por toda su superficie se podía desplazar una regla con pínulas en sus extremos, que pronto serían sustituidas, como decía Bails, por un “anteojo de larga vista”.

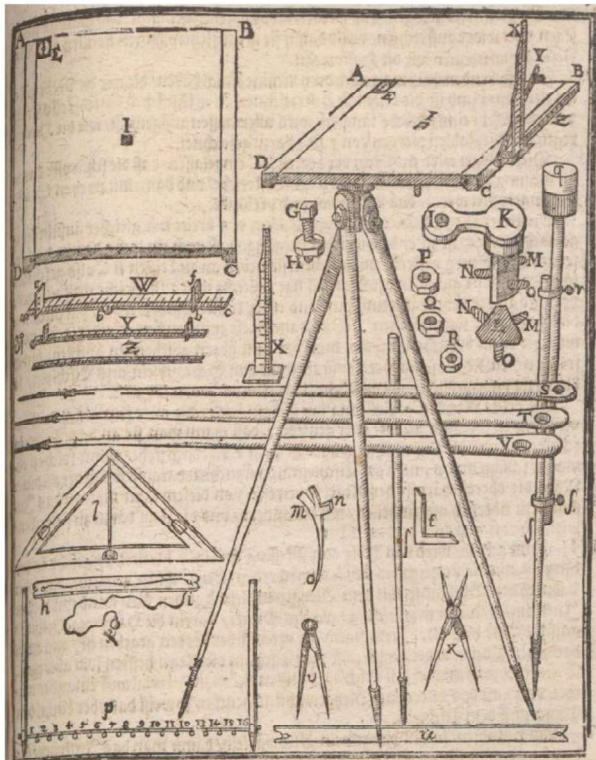
Bails explicó a continuación como se efectuaba el levantamiento con la plancheta, recurriendo como antes a las intersecciones angulares:

“se busca una base mn ,...,y plantado en m el pie del instrumento, se manda plantar un piquete en n ; se aplica sobre el papel la regla LM , y colocándola de modo que se pueda ver por las dos pínulas el piquete plantado en n , se tira después a lo largo de la regla una línea EF , dándola tantas partes de la escala del plan, cuantas medidas cupiesen entre el punto E desde el cual se observa el primero, y el punto f desde el cual se observará en la segunda estación. Después se la ha de dar vuelta a la regla alrededor del punto E hasta encontrar, mirando por las pínulas, alguno de los objetos I, H, G ; y a medida que se encontrare alguno, se tirará a lo largo de la regla una línea indefinida. Habiendo recorrido de este modo todos los objetos que se pueden ver desde el punto m , se llevará el instrumento a n , dejando un piquete en m : se harán en el punto n las mismas observaciones respecto de los objetos I, H, G , que se hubiesen hecho en la estación antecedente. Las líneas fi, fb, fg , que en este caso van hasta dichos objetos, encuentran las primeras en los puntos g, h, i que son la representación de los objetos G, H, P ”.

Una vez determinados los puntos fundamentales del plano, se procedía a la representación de los restantes para configurar el dibujo definitivo. En esta ocasión resultaba muy común efectuar una especie de intersección inversa, cuya ejecución la detallaba perfectamente Bails:

“supongamos que estén determinados los objetos *A, B, C*, y representados en el mapa por los puntos *a, b, c* y que sea *D* un punto cuya situación no se sabe...Se plantará la plancheta en *D*, orientándola conforme diremos más abajo: se dirigirá la alidada primero hacia la línea *Aa*, después hacia *Bb*, y trazando una línea a lo largo de la alidada en cada operación, su concurso *d* señalará en el mapa la situación del punto *D* respecto de los objetos *A, B, C*. Se comprobará esta situación con dirigir la alidada hacia *Ce*, y se observará si esta línea prolongada pasa por el punto *d*”.

También se podía realizar con la plancheta parte del levantamiento, a partir de una sola estación, “en este caso es preciso medir respecto de cada objeto la distancia a la que está la plancheta, y se señala en partes de la escala del plan a lo largo de la regla dirigida a dicho objeto”.



La plancheta con sus accesorios en la obra de Daniel Schewenter: Geometriae practicae novae et auctae practatus, va acompañada con dos estampas que representan a ingenieros geógrafos franceses efectuando una observación con dicho instrumento.

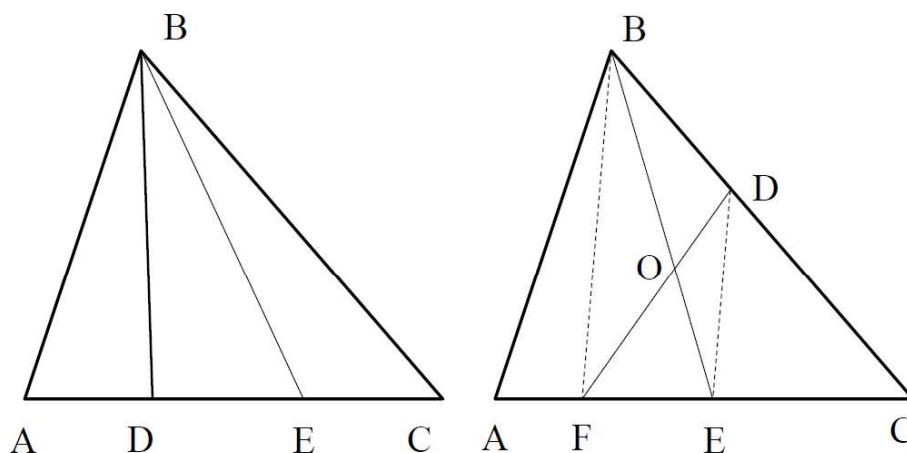
Una etapa complementaria de los trabajos realizados con este instrumento, era la de la orientación magnética del plano. Bails explicaba cómo podría conseguirse por medio de una brújula rectangular:

“en medio del fondo está trazada una línea paralela al lado más largo de la caja, y en esta línea está el eje que sostiene la aguja. Para *señalar en el plan la dirección de la aguja*, se coloca la alidada de la plancheta en la línea que pasa por dos objetos señalados en el plan, y de modo que la representación de dichos objetos en el plan esté en la misma línea. Se pone después la brújula encima de la plancheta y se le da la vuelta hasta que se pare la aguja en la línea Norte Sur de la caja; esto es, en la línea del medio del fondo de la caja. Se traza finalmente una línea en la dirección del lado largo de la caja, cuya línea es la dirección de la aguja”.

Bails emprendió después un nuevo capítulo para estudiar las posibles transformaciones de las figuras, limitándolas a las rectilíneas. En todos los supuestos partía de que dos de ellas sería iguales cuando “la superficie de cada una se compone de un mismo número de partes iguales, sea la que fuere la que pueda haber entre sus lados y sus ángulos”. Tras resolver numerosos ejercicios concluyó que “*no hay figura rectilínea ninguna que no se pueda transformar en triángulo*, porque transformándola sucesivamente en otras figuras tales que cada una tenga un lado menos que la antecedente, quedará por fin transformada en triángulo”. Algunos de los ejercicios anteriores, como los que presentó en el apartado que dedicó a la división de las figuras, tuvieron una intencionalidad eminentemente práctica. Un ejemplo paradigmático fue el del triángulo que se dividía en tres partes iguales “por medio de líneas tiradas desde el ángulo opuesto a la base”. La división resultaba obvia, una vez partida la base en tres segmentos iguales, pues cada uno de los tres triángulos, con vértice común, tendría la misma base e idéntica altura y por tanto igual superficie.

Esa propiedad tan simple, la aplicó de inmediato para solucionar un interesante problema de agrimensura: “supongamos que representando el triángulo ABC un campo, haya en D un pedazo de tierra mejor que la demás de la heredad, y se haya de partir entre dos, de modo que a cada uno le toque igual porción del pedazo bueno. Se dividirá la base AC en dos partes iguales en E , desde cuyo punto se tirarán las líneas EB y ED , y desde

B la *BF* paralela a *DE*, y finalmente la *FD* que dividirá el triángulo en dos partes iguales *BDFA* y *DFC*³¹³”.



Copia de la Ilustración empleada por Benito Bails en su problema de agrimensura.

Bails completó sus lecciones de geometría práctica con el apartado referido al cálculo de superficies, dando por sabidas las de los triángulos y otros polígonos regulares; en todos los casos empleó como unidad de medida la vara y el pie cuadrado. El procedimiento que eligió para obtener la superficie de una figura irregular cualquiera fue el de descomponerla en triángulos y hallar la de cada uno de ellos. De hecho lo recomendaba expresamente cuando se planteaba la necesidad de “*medir un terreno ABCDF, por cuyo interior suponemos que se puede transitar*”; tras levantar el plano *abcdf* se medirían todos los triángulos que lo componen y se sumarían las superficies de todos ellos para obtener la solicitada. También planteó la posibilidad de que el terreno a medir solo fuese accesible por su perímetro externo: “se harán plantar unos piquetes grandes en *A, B, C, D, F* y se medirán los ángulos *A, B, C, &c.* y los lados que los comprenden. Se hará el ángulo *a* igual al ángulo *A*, se tomará *ab* de tantas partes de la escala cuantas veces contiene *AB*; se hará el ángulo *b* igual a *B*, y se tomará *bc* de tantas partes de la escala cuantas varas contenga *BC*, y así prosiguiendo se trazará la figura *abcdf*, que se medirá conforme se dijo³¹⁴”.

³¹³ La demostración geométrica dada por el autor fue la siguiente: “el triángulo *ABE* es la mitad del triángulo total *ABC*, y siendo por razón de las paralelas *BF* y *DE* el triángulo *BFD* igual al triángulo *BEF*, se sigue que el triángulo *OFE* que se ha quitado del triángulo *BEA*, es igual al triángulo *ODB* que se ha quitado del triángulo *EBC*; de lo que resulta que el trapezoide *BDFA* es igual al triángulo *FDC*”.

³¹⁴ Se refería Bails a que el área de un polígono irregular se obtendría dividiéndolo antes en triángulos, de modo que su vértice común fuese uno próximo a su centro y los demás coincidieran con los del polígono. Seguidamente se calcularía la superficie de cada triángulo y se sumarían los resultados así obtenidos.

El cálculo de la superficie por ese procedimiento de descomposición fue práctica habitual hasta que aparecieron los métodos mecánicos y comenzaron a implementarse los analíticos, auspiciados por los avances experimentados en el cálculo numérico. Bails justificaba indirectamente tal proceder: “por este método se podría medir la superficie de un país pantanoso, de una laguna, de un bosque, y la superficie horizontal que ocupa la base de una montaña alrededor de la cual se puede andar. Si su contorno no fuera una línea curva, se plantarán piquetes de trecho a trecho de modo que se pudiere tomar, sin error sustancial, por línea recta la parte comprendida entre dos piquetes”. Parece como si Bails no hubiese quedado satisfecho con la última parte de su aclaración, ya que acto seguido decidió explicar cómo podría medirse “*un terreno FEHGF terminado por una línea curva*”. Básicamente trazaba un rectángulo circunscrito al terreno en cuestión, del que calculaba su superficie con toda facilidad. Después se determinaría la superficie de cada triángulo de las esquinas, para sumarlas y restarlas de la del citado rectángulo³¹⁵.

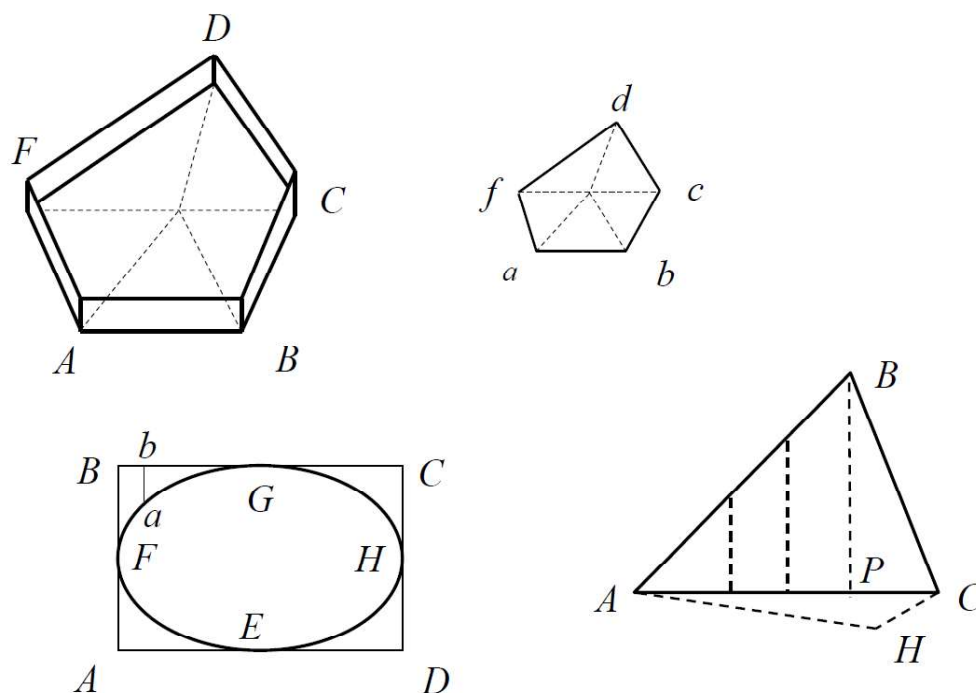
Bails dedicó la última parte de su exposición al cálculo de las superficies localizadas sobre laderas con una cierta pendiente. En todos los casos hallaba la superficie de las mismas, considerándolas proyectadas sobre un plano horizontal, el texto de sus recomendaciones recuerda todavía la que ha de repetirse en demasiadas ocasiones³¹⁶:

“Cuando se trata de medir un terreno o levantar su plan, se pide comúnmente su superficie horizontal. El que compra un terreno lleva por lo común la mira de labrar una casa, plantar árboles, o sembrarle. Los árboles y las plantas en general crecen perpendiculares al horizonte, y el número de árboles que se pueden plantar, la cantidad de grano que se puede coger, y la extensión de los edificios corresponde a la superficie horizontal. Y así, sea la que fuere la superficie aparente del terreno, solo se debe atender a la superficie horizontal: luego si esta no es más que la mitad de la superficie total medida por la cuesta, se ha de pagar el terreno la mitad menos de lo que se compraría si fuese horizontal la superficie de la cuesta, y aún se puede dar algo menos de la mitad, porque un terreno en cuesta es menos acomodado que un terreno horizontal. Si representa *ABC* una montaña

³¹⁵ Bails ajustaba un tanto el procedimiento, al considerar previamente, en cada caso, un trapecio como el *bBFa* de la figura siguiente.

³¹⁶ Son disculpables las preguntas al respecto de personas sin instrucción, pero no las que formulan titulados universitarios.

cuya base AC sea horizontal, no podrán plantar en el pendiente AB de la montaña más árboles que en la superficie horizontal correspondiente AP ; porque si imaginamos los árboles prolongados, es patente que su distancia apreciada horizontalmente, no puede ser mayor en la cuesta que en la llanura”.



Copia de las ilustraciones empleadas por Bails, en la explicación del cálculo de las superficies.

Ya se apuntó, al iniciar este capítulo, que Benito Bails volvió a tratar de la nivelación topográfica, con mayor amplitud, en la segunda parte del tomo IX de sus *Elementos de Matemática*, cuyo tema central fue la Arquitectura Hidráulica. Bails incluyó esta materia en el tratado que dedicó a tan importante asunto por considerarla parte consustancial del mismo. De hecho desarrolló bajo el epígrafe *De la Nivelación*, cuestiones tan relevantes como las adiciones, ataguías, calzadas, espolones, estacadas, malecones, lenguas, diques, azudes y el aprovechamiento del agua para la navegación³¹⁷. La trascendencia de la nivelación en la ingeniería civil era ponderada por el arquitecto catalán, con estas palabras: “esta operación pide muchísimo pulso, por los gravísimos perjuicios que se siguen de una

³¹⁷ Sin embargo, su estudio no se abordará en este trabajo, por considerar que excede del alcance previsto para el mismo.

nivelación errada, cuyo error puede originarse tanto de la imperfección del instrumento con que se ejecuta, cuanto de la poca destreza del práctico”.

Después de describir nuevamente el nivel de agua, así como las nivelaciones simple y compuesta, incidió también en la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero, la corrección por la esfericidad terrestre, aclarando su significado “la proporción del cuadrado de las distancias, quiere decir que si a una distancia determinada se sabe cuál es la diferencia entre el desnivel aparente y el verdadero a una distancia dupla, la diferencia será cuádrupla³¹⁸”. Las limitaciones del nivel de agua, descrito hasta ahora, se dejaban sentir sobre todo en las nivelaciones a efectuar durante la ejecución de las grandes obras hidráulicas, ya que la exactitud requerida debía ser la máxima esperada. Bails resumía a la perfección lo que solía suceder “en las obras hidráulicas se ofrece nivelar trechos muy grandes de terreno, para cuyos casos sería muy molesto valerse del nivel de agua, porque alcanzando poco la vista sola, sería forzoso multiplicar muchísimo las estaciones y si saliesen erradas o faltas de la escrupulosa puntualidad que conviene, se erraría mucho la nivelación, a no ser que por la rarísima casualidad los errores de unas estaciones enmendaran los de las otras”.

La proliferación de tales obras favoreció el desarrollo de la investigación instrumental en el sector, llegando a alcanzar a los propios niveles de agua; la principal innovación que trajo consigo fue la incorporación a los mismos del anteojo, con el consiguiente aumento de la distancia que se podría nivelar con una sola estación del instrumento³¹⁹. Bails mencionó como paradigma el diseñado por el académico Philippe de la Hire³²⁰, el cual sería luego perfeccionado por sus compatriotas Claude Antoine Couplet³²¹ y Antoine Deparcieux³²². De la extensa y detallada descripción que hizo del instrumento, convenientemente ilustrada con la figura adjunta, destacan los dos recipientes en los que se vertía el agua y muy especialmente los

³¹⁸ Bails incorporó una tabla, de su propia cosecha, en la que indicaba las diferencias entre los desniveles reales y aparentes, expresadas en pies, pulgadas y líneas, para una serie de distancias comprendidas entre 300 y 24000 varas; continuándola luego con las correcciones asociadas a las distancias de 12000, 16000, 20000 y 24000 varas.

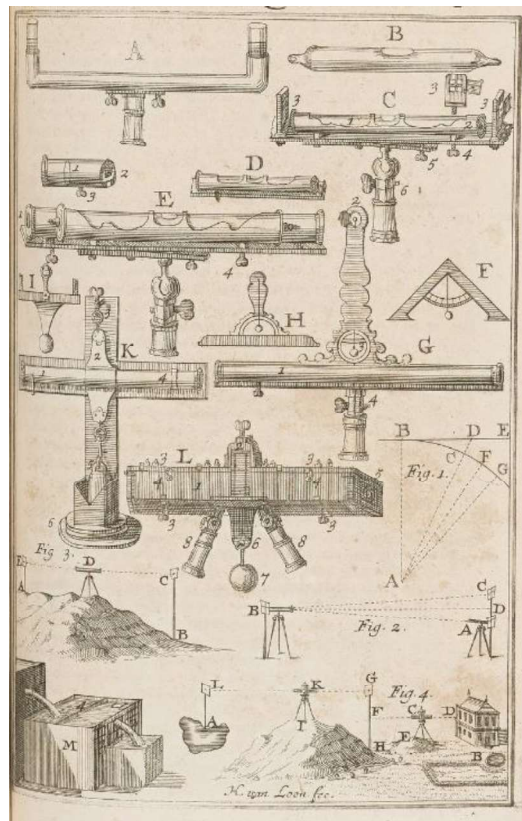
³¹⁹ La construcción de esos nuevos niveles con anteojo seguí fundándose en “la propiedad que goza el agua, como todos los demás fluidos, de poner horizontal su superficie...y por consiguiente a un nivel”. Otras de las ventajas, que también señaló Bails, fueron las de su fácil construcción, seguridad y “uso acomodado”.

³²⁰ Matemático francés, además de astrónomo y cartógrafo, que contribuyó decisivamente a la interconexión entre la arquitectura y las otras disciplinas científicas.

³²¹ Ingeniero mecánico dedicado al estudio de las matemáticas en general y al de la hidráulica en particular.

³²² Consagrado principalmente al estudio de las aplicaciones sociales de las matemáticas.

“A es una tablita de un pie cuadrado de madera muy ligera que ha de correr por el estadal de arriba abajo y de abajo arriba, la cual se afirma al estadal con una sortija de hierro que tiene detrás, por medio de un agujero a manera de tuerca, en la cual se mete una llave atornillada que afianza la tablita de modo que no puede descomponerse. El estadal está dividido en pies, pulgadas y líneas, y la tablita en dos partes iguales por una línea horizontal, la una blanca y la otra negra, siendo su cara trasera toda negra. Para comodidad del oficial se junta con la tablita un palo *DE* de una vara de largo, el cual puede correr a lo largo del estadal, cabiéndole ambos en la mano, con el fin de subir y bajar la tablita, según convenga. Si un estadal no bastare, se juntarán dos o los que fueren menester”.



Distintas clases de niveles, expuestos por Nicolas Bion en su obra sobre la construcción de instrumentos matemáticos.

Estacionado el nivel y colocado el estadal, el operador indicaba al auxiliar que desplazase verticalmente la tablilla hasta que el encuentro de los hilos se proyectase justamente “en la línea horizontal que separa la mitad blanca de la mitad negra”; en tal instante se procedía a la lectura sobre el estadal de los pies, pulgadas y líneas que correspondiesen.

Sobresale en esta explicación complementaria de Bails el ejemplo que propuso como posible aplicación de la nivelación compuesta: “averiguar a qué altura están, uno respecto de otro, dos ríos en los puntos A y N”. Su primera recomendación fue la de señalar convenientemente ambos puntos, “con dos piquetes a flor de agua...porque aquí todo el empeño está en saber cuánto la cabeza de uno de los piquetes está más o menos alta que la del otro, lo que señalará la altura recíproca de los dos ríos en los puntos señalados”. A continuación, el arquitecto reconocería el terreno por el que discurriría la nivelación y levantaría el plano del mismo. Fijado el itinerario más adecuado, se marcarían los puntos notables del mismo, para indicar los extremos de los diferentes tramos a nivelar: los puntos A, B,..., M y N. Asimismo se identificarían las estaciones de nivel que serían necesarias: 1, 2...., 10 y 11. Para dar comienzo a la nivelación propiamente dicha, se tendría a la vista el cuaderno de campo con sus hojas divididas en cinco columnas:

NIVELACIÓN COMPUESTA ENTRE DOS RÍOS.									
Ejemplo propuesto por Benito Bails									
Primer término	Altura			Segundo término	Altura			Distancia Estadales	
A	7	6	0	B	6	0	0	166	
B	4	6	0	C	5	6	2	250	
C	12	8	6	D	8	4	0	240	
D	0	0	0	E	4	1	0	240	
E	6	10	0	F	2	11	0	250	
F	7	0	4	G	4	8	0	300	
G	7	7	6	H	10	0	0	250	
H	4	6	4	I	8	10	0	110	
I	6	3	0	K	10	0	0	130	
K	6	4	3	L	5	8	0	250	
L	7	0	0	M	8	4	3	250	
M	6	5	0	N	7	10	0	250	
	76	8	11		82	2	5	2686	

Para facilitar la comprensión del método empleado, añadió Bails una serie de lecturas concretas, reflejadas en el cuadro adjunto, sin olvidar el *modus operandi*:

“se plantará el instrumento en la primera estación 1, a igual distancia de cada uno de los términos A y B, y si los suponemos distantes uno de otro 166 estadales, la línea de nivelación será por lo mismo 83 estadales de cada lado. Se escribirá, pues, en la primera columna el primer término A, en la

segunda, los pies, pulgadas &c. que la puntería *a*,... estará más alto que A, cuya cantidad suponemos de 7 pies 6 pulgadas. En la tercera columna se señalará el segundo término B, y en la cuarta los pies, pulgadas &c. que la puntería *b* estuviere más alta que el término B, que aquí será de 6 pies; finalmente, en quinta columna se apuntará la distancia de un término a otro, que aquí es de 166 estadales”.

En las demás estaciones se procedería de forma similar, colocando siempre el nivel en el punto medio y “en llegando al último término N donde acaba la nivelación, se sumarán unas con otras las partidas de cada columna. Hecho esto se restará la suma de la primera columna de la suma de la segunda, la resta expresará lo que el término N estará más bajo que A”. Bails dedujo así un desnivel de 5 pies, 5 pulgadas y 6 líneas, diferencia entre las alturas de la cuarta columna (82 pies 2 pulgadas 5 líneas) y de la segunda (76 pies 8 pulgadas 11 líneas)³²⁵.

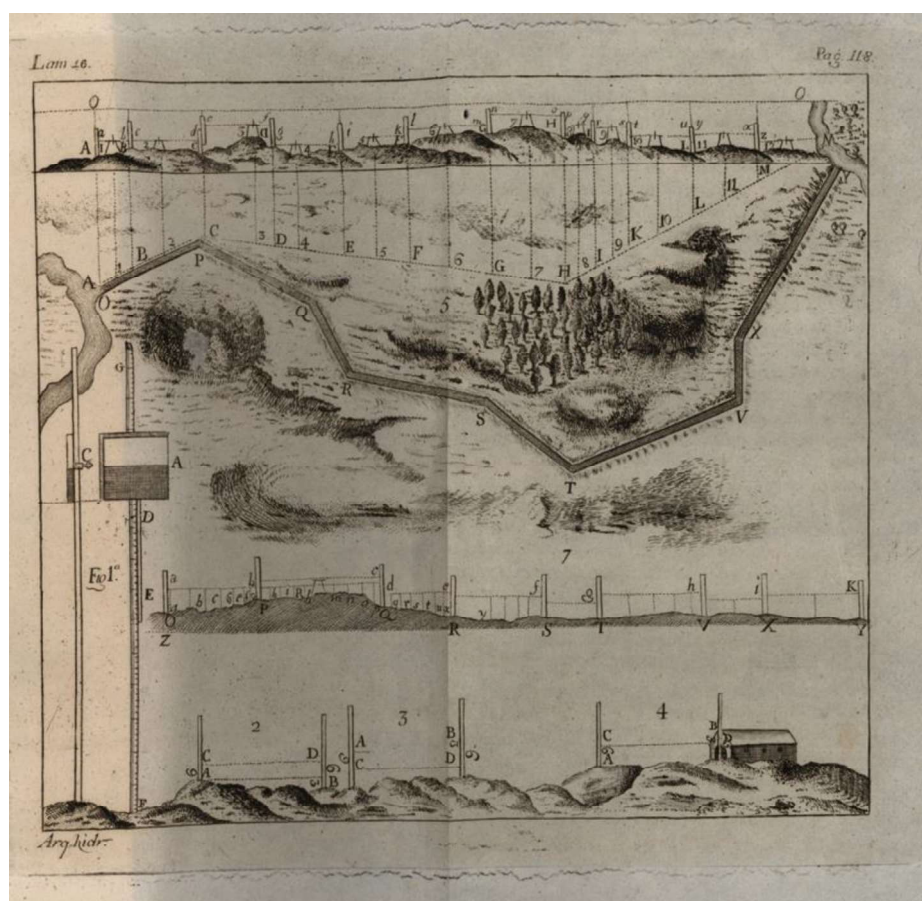


Lámina 16, incluida por Bails en el tomo IX de sus Elementos de Matemática (Parte II. Arquitectura Hidráulica. Práctica de la Nivelación, página 118). Imagen cedida por el Real Instituto y Observatorio de la Armada (San Fernando. Cádiz).

³²⁵ Téngase en cuenta la relación entre las tres unidades.

Bails se involucró tanto en la enseñanza de la nivelación, que explicó muy cuidadosamente una de sus aplicaciones más sobresalientes: el dibujo de un perfil longitudinal según la traza definida por los extremos de los tramos nivelados, cuya unión secuencial coincidía con el itinerario ya mencionado. Su construcción la inició eligiendo la línea que serviría de referencia altimétrica³²⁶ y trazando las perpendiculares, a la misma, en cada uno de los puntos en que se colocó el estadal, y el propio nivel de agua, al efectuar la nivelación. Acto seguido comenzaría el dibujo del perfil propiamente dicho:

“empezando, pues, por el primer término *A*, donde está la primera perpendicular, se señalará en el estadal plantado en dicho término un punto *a* a la altura 7-6-0, diferencia del punto de nivel y del término *A*. Por el punto *a* se tirará una paralela a la línea de nivel, cuya paralela cortará la tercer perpendicular en *b* del segundo estadal. Debajo del punto *b* se señalarán 6 pies hasta *B*, donde estará el segundo término de esta primer nivelación, por consiguiente se echará de ver que en el término *B* estará el terreno 1-6-0 más alto que *A*”.

En la lámina siguiente, se comprueba que se iría repitiendo el proceso seguido en el primer tramo de la nivelación, tal como concluía el autor: “Haciendo después lo mismo desde cada término y cada estación a otra, hasta el último término *N*, quedará puntualmente trazado el perfil del terreno por donde pasare la nivelación, como aquí de toda la línea de puntos *A, B, C, D, &c.*”.

También contempló Bails la necesidad de completar la información topográfica proporcionada por el perfil longitudinal anterior, sugiriendo que deberían estaquillarse los puntos más singulares comprendidos entre los extremos de cada uno de los tramos nivelados³²⁷. De esa manera, quedaría mejor representada la superficie topográfica del terreno, una vez

³²⁶ Llamada por Bails línea de nivel.

³²⁷ Aunque Bails comentase que lo más general era ir de un extremo al otro por el camino más corto, era lícito “y aún necesario quebrantarla siempre que por seguirla a la letra se tropiece con grandes obstáculos y dificultades, como cerros, bosques intransitables, lagunas &c. y de lo contrario se siguiera algún notable beneficio, como en este ejemplo, donde para ir desde *A*, primer término, al segundo *B* se podrían aprovechar las lagunas que suponemos algo a la izquierda de la línea de nivelación... pues el camino de la línea de puntos *AcdefghikB*, bien que parece más largo, es en realidad más corto, porque solo habrá que nivelar la distancia de una laguna a otra, como las *Ac, de, fg, &c.* siendo cada una de las distancias entre los términos *cd &c.* necesariamente una línea de nivel verdadero, la que forma la superficie del agua de cada laguna. Porque es constante que no hay líneas ni puntos de nivel más seguros que los de la superficie de agua mansa y sin movimiento, cuya proporción conviene mucho aprovechar, así para abreviar, como para acertar la operación”.

colocado el estatal en todos los puntos y obtenidos, mediante el nivel de agua, las diferencias de alturas entre ellos y los extremos respectivos. Bails detalló el procedimiento bajo el epígrafe *Otro método para trazar con más individualidad el perfil de una nivelación*, aplicándolo igualmente a los puntos A y N de los dos ríos ya citados; aunque el itinerario discurriese “por otro terreno...menos alto respecto del nivel de los dos ríos, a fin de abrir, para comunicación de uno con otro, el canal señalado *OPQRSTVXY*”. Generalmente se nivelaría usando el método del punto extremo, es decir estacionando el nivel en cualquiera de los puntos que definían ese nuevo trazado, si bien se podría usar igualmente en la operación el método más fiable del punto medio: “Cuando no quiera el práctico permanecer en una misma estación, podrá trasladar el instrumento a otro término, o plantarse entre uno y otro, conforme se ve aquí (Lam.16), donde está entre el segundo y el tercero, y saldrá de todo punto lo mismo. Proporcionan estos perfiles formar cabal juicio de las tierras que se han de excavar para abrir un canal como el que figuramos en el plano para comunicación de los dos ríos, añadiendo lo que se le quiera dar de profundo”.

El último ejercicio planteado por Bails estaba relacionado con la traída de aguas desde un lago, situado en una zona montañosa, hasta un estanque construido en la llanura sobre la que se asentaba aquella. He aquí el enunciado: “Propongámonos nivelar desde el punto *A* (Lam.18) de la superficie de una agua que cae de montañas hasta el punto *K* del suelo de un estanque, donde suponemos que se quiera hacer un surtidor; para saber a qué altura subiría encaminando las aguas desde el punto *A* como depósito al punto *K* por encañados dispuestos como corresponde”. Como él mismo indicaba, se tendría que efectuar una nivelación que enlazara el lago con el estanque, no solo para obtener el desnivel entre ambos sino también el perfil longitudinal del terreno por el que discurriría el itinerario. En este supuesto se presentaba la novedad de usar dos niveles de agua: uno simple y otro con anteojo, análogo al presentado por A. Parcieux ante la Academia de Ciencias de París.

El primero³²⁸ se emplearía en la ladera de mayor pendiente, sobre la que se habrían señalado, como extremos de los tramos, los puntos *B*, *C* y *D*, representados por Bails en la lámina citada. El comentario posterior fue

³²⁸ Bails justificaba su empleo porque al tratarse de distancias cortas no se cometerían errores considerables.

harto elocuente: “después se dejará el nivel de agua, para nivelar con el grande, porque con este se nivelará con más puntualidad el terreno propuesto en cinco veces, que no en ciento y veinte con el primero³²⁹”. Bails no procedió, en este caso, de forma ortodoxa al anotar las lecturas en el cuaderno de observación, en tanto que en lugar de apuntar las realmente observadas, como era de esperar, vació otras ya modificadas, para así tener en cuenta el posible error de esfericidad:

“nivelaremos, pues, con el nivel de anteojo en una sola estación, apuntando desde *D* el punto *E*, después se señalará en la primer columna, siempre de seguida, el término *D* donde está la estación; en la segunda columna, la altura del encuentro de las hebras del anteojo más arriba del término *D*, suponiéndola de 3-9-0; en la tercera el término *E*, y en la cuarta 16-3-0, pero como para la distancia de 3500 estadales³³⁰, que hay del término *D* al término *E*, la diferencia del nivel aparente al verdadero es de unas 0-3-0, será preciso restar 0-3-0 de 16-6-0, y restarán 16-3-0, altura del punto de nivel más arriba del punto *E*, cuya cantidad se apuntará en la cuarta columna, y en la quinta 3500 distancia del término *D* al término *E*”.

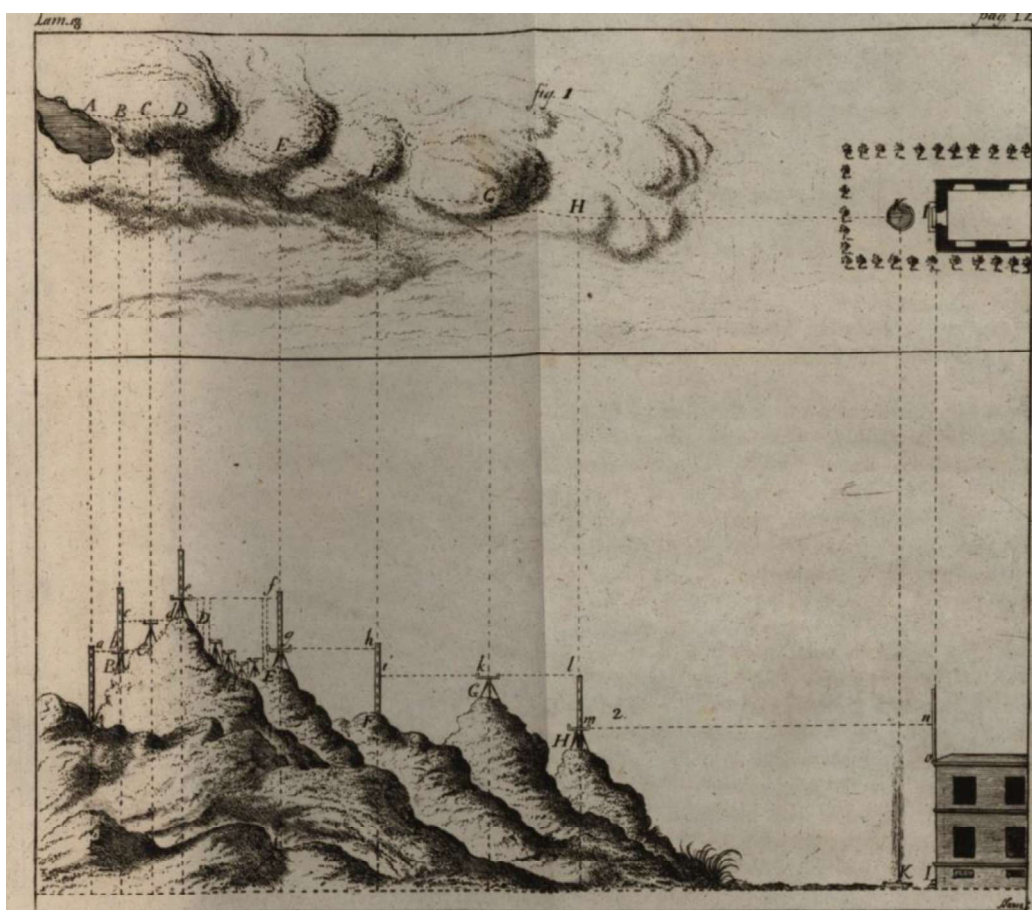
NIVELACION ENTRE UN LAGO Y UN ESTANQUE					
Ejemplo planteado por Benito Bails					
Primer término	Altura	Segundo término	Altura	Distancia Estadales	
A	21 6 0	C	0 9 0	90	
C	4 3 0	D	0 3 0	40	
D	3 9 0	E	16 3 0	3500	
E	5 0 0	F	17 10 7	250	
F	10 9 8	G	5 0 0	375	
G	5 0 0	H	19 0 0	300	
H	5 0 0	K	49 3 2	1000	
Sumas	55 3 8		108 4 9	2405	

De forma parecida se procedería con el resto del itinerario, hasta alcanzar el extremo *K*, localizado ya en el mismo estanque. Así describía Bails esta última parte:

³²⁹ Aunque parezcan excesivas las distancias niveladas desde una sola estación, no debe olvidarse que se trataría de una nivelación expedita y que los requisitos de tolerancias no serían los exigibles en una nivelación de precisión.

³³⁰ Bails aseguraba que, después de la vara, la medida más usada en Castilla era el estadal, el cual se componía de 10 pies castellanos.

“...pasando el instrumento a *H*, última estación, y suponiendo de bastante alcance el anteojo para distinguir un punto encima del palacio, donde se mandará manifestar el estadal, solo faltará medir la altura adonde cae el punto de encuentro en el estadal *n* hasta el punto *O* donde está plantado, medir después la altura desde el punto *O* al piso del suelo *I*, y desde el piso del suelo hasta el suelo del estanque, que supondremos sea en todo 50-9-7, de cuya cantidad deberá restarse 1-6-5 diferencia entre el nivel verdadero y el aparente para 10000 varas de distancia que suponemos entre los dos términos habría, pues, desde el punto de puntería hasta el suelo del estanque *K* 49-3-2 de altura, la cual se apuntará en la cuarta columna, y 1000 en la quinta, distancia de un término a otro. Habiendo, pues, apuntado cada cosa en su columna, sumando y restando, se hallará que el punto *A* está 51-9-0 más alto que el punto *K* del suelo del estanque, lo que proporcionará sacar la altura a que subirá el surtidor”.



Ejemplo de perfil longitudinal presentado por Benito Bails, en relación con una traída de aguas. Lámina 18 reproducida en la página 126 del Tomo IX de sus Elementos de Matemática (II parte dedicada a la Arquitectura Hidráulica). Imagen cedida por el Real Instituto y Observatorio de la Armada (San Fernando. Cádiz).

El dibujo del perfil correspondiente no ofrecería ahora dificultad alguna, puesto que se efectuaría siguiendo la pauta de los ya ejecutados, con la salvedad de que el nivel de referencia para las alturas sería el suelo del estanque; únicamente se podría complicar la representación si se deseara proporcionar información más detallada del relieve comprendido entre cada tramo, ya que entonces habría que realizar una nivelación compuesta en la zona seleccionada, como puede comprobarse en la figura adjunta.

6. *APUNTES SISMOLÓGICOS*



Los comentarios sismológicos realizados por Benito Bails fueron incluidos en su obra: Tratado de la Conservación de la Salud de los Pueblos y consideraciones sobre los Terremotos³³¹. En el prefacio confesaba que pretendía prolongar, en cierto modo, el tomo que había dedicado a la Arquitectura; puesto que

“después de haber declarado como se fundaba una población, creía necesario añadirle algunas advertencias, bajo el título de *Policía de la Ciudad*, encaminadas a conservar la salud de sus moradores, pues por más cuidado que se ponga en escoger el sitio en donde se ha de fundar una Ciudad,..., padecerían infinitas enfermedades sus vecinos, si ellos³³², o el Gobierno se descuidasen en mantener puro el aire que respiramos, a cuya composición atribuyen los Médicos más experimentados de todos los siglos casi todas las enfermedades que nos acometen”.

Efectivamente, las consideraciones sobre los terremotos figuran como anexo de los 31 capítulos de que consta el libro, siendo desarrolladas entre las páginas 328 y 359. En el texto se respeta la doctrina tradicional imperante en aquella época, creyendo que los sismos eran fenómenos meteorológicos, cuyo origen podía explicarse a la luz de los capítulos anteriores, centrados exclusivamente en el estudio del aire. De acuerdo con ella consideraba el autor que casi resultaba innecesario abundar en una cuestión ya resuelta, hasta el extremo de que “muchos tendrían por curiosidad impertinente, o trabajo superfluo el tratar ahora de los terremotos, después de que los mayores ingenios, así de la docta antigüedad, como de los tiempos modernos, han escrito tanto sobre este asunto, que ya no hay lugar a mayores indagaciones, quedando ceñido todo lo que acerca de él se puede decir a copiar lo que se lee en Aristóteles³³³,

³³¹ El título completo del Anexo fue: Consideraciones sobre los Terremotos, con la noticia de los más considerables de que hacen mención las Historias; y del último que se sintió en Europa el día primero de Noviembre de 1755. Bails reconoce en el prólogo que su trabajo era la traducción de una obra portuguesa atribuida al prestigioso médico Antonio Ribeiro Sánchez, el cual estudió y se graduó en la Universidad de Salamanca. Muy pronto se trasladó a Rusia y fue nombrado primer médico de la zarina. Más adelante se estableció en París, en donde vivía de la pensión que recibía de la corte de San Petersburgo. El propio médico le envió a Bails información adicional para completar la traducción que estaba efectuando.

³³² Bails se estaba refiriendo a los Arquitectos.

³³³ El pensamiento sismológico aristotélico quedó plasmado en su tratado *Metereologica* (Meteor), escrito en torno al año 350 a.C., y más concretamente en los tres últimos capítulos de su libro II. Gracias a él se tuvieron noticias de las contribuciones previas de Anaxágoras, Anaxímenes y Demócrito. Aristóteles asociaba los terremotos los vientos, creyendo que los temblores podían ser de dos tipos: secos y húmedos. A su juicio, la mayoría se producía en tiempos de calma y durante la noche, aunque algunos se pudiesen producir también a mediodía. Las épocas más propicias para su ocurrencia eran los equinoccios, todo lo contrario de lo que sucedía con las otras dos estaciones, por tratarse de periodos poco ventosos. Llama la atención que usara en sus explicaciones el símil humano, en donde por el efecto de los

Séneca, Plinio³³⁴, en las Transacciones Filosóficas, y en las Memorias de la Real Academia de Ciencias de París”.



Portada de la Meteorología de Aristóteles y un grabado en el que se representa, vestido a la usanza sarracena, enseñando astronomía a sus discípulos.

No obstante, a esas alturas del siglo XVIII aún se mantenía el carácter mitológico de los terremotos, a tenor de lo escrito en la página 330 del libro: “No hay a buen seguro hombre ninguno, como no sea algún impío, que sea osado negar que los terremotos son instrumentos de que se ha valido la Divina Omnipotencia para castigo de los hombres; pero tampoco habrá ninguno tan temerario que afirme que todos han sucedido con este fin”. Inmediatamente después se aseguraba que si se conociesen las causas reales que los producían, como sucedía con los vientos y otros fenómenos meteorológicos, “acaso no graduaríamos estos ruidosos movimientos de la naturaleza de castigo del cielo, ni fundaríamos en ellos los pronósticos de nuestra total ruina”.

gases se producían espasmos, estremecimientos y palpitaciones. La posterior difusión de esta contribución de Aristóteles fue favorecida por su traducción al árabe, incluida en el texto Al'thaar Al'ulwiyyah, realizada en Antioquía por Yahya ibn al-Bitric, en el año 800. Cuatro siglos después fue traducida al latín por Gerardo de Cremona, propiciando así su introducción definitiva en el occidente cristiano, a través de la versión mejorada del prolífico traductor flamenco William de Moerbeke.

³³⁴ En la Historia Natural de Plinio (Libro II. Cap. 79) se afirmaba que los terremotos y los volcanes eran los truenos y rayos del interior de la Tierra.

Aunque el autor indicase que no era su intención escribir la historia de los terremotos, lo cierto es que hizo una crónica muy interesante de los más importantes que se produjeron durante el imperio romano. Cronistas como Tácito, Estrabón, Séneca o Plinio, refirieron el gran terremoto nocturno del año 19 de nuestra era, el cual destruyó doce ciudades de Asia. La descripción del fenómeno así lo atestigua, la tierra se abrió en muchos lugares “y en estos precipicios hallaban su mayor ruina. Muchas montañas nacieron de los abismos: muchos valles y llanuras se transformaron en empinadas sierras, y por entre estas horribles mudanzas de la tierra se vieron salir consumidoras llamas”. Tácito comentó como, ante tamaña desolación³³⁵, “el duro y cruel corazón de Tiberio se ablandó y volvió tan piadoso, que no solo dispensó a las ciudades el pagar tributos los cinco años inmediatos, sino que también las mandó repartir crecidas sumas para resarcir las pérdidas y redificar las casas”.



Sestercio, con la imagen del emperador Tiberio, acuñado para recordar la reconstrucción de las ciudades destruidas por el terremoto del año 19.

³³⁵ Bails añadía que aún se conservaba la memoria de aquel terremoto, gracias a la acuñación del sestercio con la siguiente leyenda *Civitatis Asiae Restitutis*, con la que se pretendió recordar la reconstrucción de tales ciudades.

Más señalado todavía fue el que tuvo lugar en Antioquía, casi 100 años después, ya que estuvo a punto de costarle la vida al emperador Trajano y a su sucesor Adriano. El sismo se produjo el día 3 de diciembre del año 115, siendo precedido por “vientos furiosos, espantosos truenos, con ruidos debajo de tierra: las casas y torres empezaron dando vaivenes del mismo modo que los navíos dan balances en medio de una mar tempestuosa...y estos movimientos de la tierra duraron muchos días con muy poca interrupción³³⁶. El mismo Trajano...pudo apenas escapar del riesgo saltando por la ventana de su cuarto”.

El siguiente episodio referido fue el del año 262, bajo el consulado de Galieno y Faustino, “el terremoto más universal de los que refieren las historias. Empezó en Asia, extendiéndose por toda la costa del Mediterráneo; muchas ciudades de estos continentes desaparecieron, quedando sepultadas en las aberturas de la tierra, y apareciendo en su lugar lagunas de agua salada. Al mismo tiempo padecía la ciudad de Roma y toda Grecia una cruel peste, con tanta mortandad que algunos días morían como mil personas”. La crónica latina formó parte de la obra *in Vita Gallieni*, debida a Trebellius Pollio.

El primer terremoto del siglo siguiente, en ser comentado, fue el que tuvo lugar el 21 de agosto del año 358, siendo Constancio el emperador. Cincuenta ciudades de Asia, Natolia y Macedonia fueron totalmente colapsadas, causando gran sensación la de Nicomedia³³⁷, considerada por entonces como una de las más florecientes del mundo, debido al fuego posterior que completó la catástrofe. El historiador Amiano Marcelino aseguraba que ese día empezó a oscurecerse el cielo, hasta el extremo de ocultar el Sol. Al mismo tiempo se desató un vendaval y “los estruendos subterráneos eran tan profundos, que los vecinos...no se conocían unos a otros. Poco después de esta universal confusión empezaron las sacudidas de tierra...parte de ella se fue a los abismos que se abrieron y parte apareció cubierta de montañas, que salieron del profundo de sus entrañas. A pesar de tanta revolución hubieran salvado sus vidas muchos vecinos, si las llamas que la tierra arrojó no los hubieran totalmente consumido”.

³³⁶ Dion Casio Coceyano manifestaba en el libro XVIII de su Historia Romana “que el monte *Lison* junto a Antioquía se inclinó de tal manera que parecía iba a arrastrar a la ciudad, que otras montañas se cayeron, que aparecieron nuevos ríos, secándose y desapareciendo otros muy caudalosos”.

³³⁷ La actual ciudad turca de Izmit. La ciudad primitiva fue destruida por Lisimaco, general de Alejandro Magno, y reconstruida por Nicomedes I en el año 264 a.C., de ahí su anterior nombre.

Especialmente violento debió ser también el temblor de tierra que afectó a todo el imperio romano el 19 de julio del año 365, durante el mandato del emperador Valente. Bails escribió que el mar Mediterráneo se alteró de tal modo “que los pescados y los monstruos marinos se quedaron en seco, su reflujo arrojó con igual violencia barcas y navíos a los montes, donde se hicieron mil pedazos”. Igualmente recordaba que San Jerónimo, al contar la vida de San Hilarión, comentó el maremoto en parecidos términos “salieron los mares de sus límites con tal ímpetu, que parecía que Dios quisiese acabar el mundo con otro diluvio, o restituirle a su primer caos”.

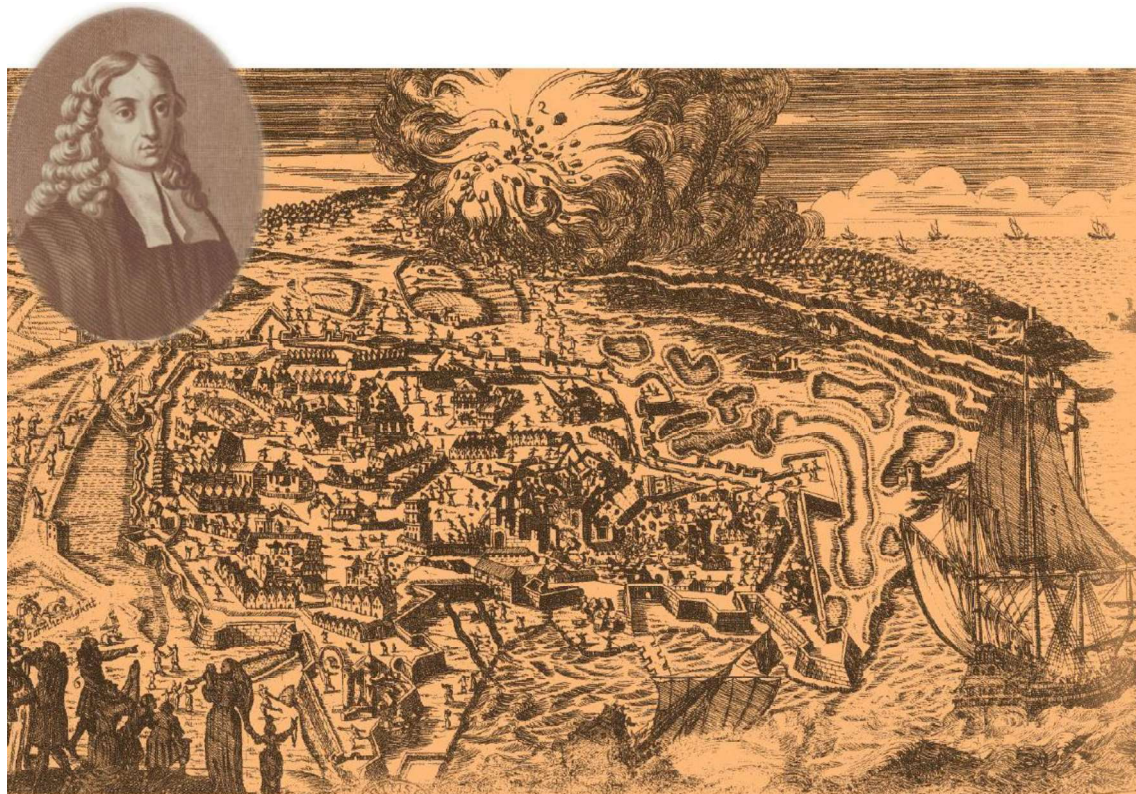
Otro terremoto memorable sacudió Roma y Constantinopla en el año 558, siendo emperador Justiniano el Grande³³⁸. Como en el caso anterior se produjo un fuerte maremoto que inundó más de tres leguas de tierra. Sus efectos no solo se dejaron sentir en ambas ciudades, pues comentaba Bails que toda Italia padeció infinito. Los terremotos principales ocurrieron durante los meses de junio y julio, aunque en el de noviembre volvieron a producirse, “quedando entre todas las ciudades y pueblos que los padecieron más maltratada Constantinopla que otra ninguna. Como principiaron de noche con vientos tan impetuosos, que parecía despedazarse el firmamento con horrorosas nieblas meonas, frío y nieve, no les quedaba a aquellos infelices más remedio, ni más consuelo que acabar en breve su vida”.

Casi 150 años después, en 742, sufrieron varios terremotos en Siria, Palestina, Sicilia, Calabria y Grecia. Las calamidades padecidas fueron tantas que el emperador Constantino IV decidió repartir el botín de sus victorias frente a los sarracenos “porque Constantinopla y las principales ciudades del Imperio Romano llegaron a los últimos de su ruina. Desde el mes de agosto hasta principios de octubre, nadie distinguía el día de la noche, porque una nube espesísima quitaba la luz”. Ribeiro apuntaba por otro lado, que de ser cierta la crónica de Nicéforo, muchas ciudades de Siria y Palestina fueron sepultadas en los abismos “y lo que causa admiración es que algunas fueron trasladadas a otro sitio seis millas, u dos leguas lejos del primero sin daño ni ruina considerable de los reinos”.

Tanto el autor como el traductor fueron reacios a continuar con la relación pormenorizada de grandes terremotos históricos en sus breves apuntes

³³⁸ *Flavius Petrus Sabbatius.*

sismológicos, si bien remitían a la celebrada historia natural de Georges Louis Leclerc, conde Buffon, para que los lectores interesados pudiesen satisfacer su curiosidad. A pesar de ello se culminó esta crónica con el famoso sismo, acompañado de maremoto, que asoló la ciudad siciliana de Catania el 17 de enero de 1693; estimando que solo salvaron su vida 914 personas, es decir el 20% de su población³³⁹.



Grabado del terremoto de Catania (1693) en el Archivo de Simancas. Se ha superpuesto un retrato de Domenico Bettone, célebre médico que lo describió.

El relato de lo sucedido, extraído del que efectuó Antonio Serrovita, causa todavía cierto espanto. Contaba ese clérigo que cuando se iba aproximando a la ciudad, el día antes, empezó a distinguir una nube densa y oscura que cubría toda ella. De repente comenzaron a salir llamas del Mongibello³⁴⁰, a la vez que las olas del mar eran tan altas que parecían llegar a las nubes. Tal era su estruendo, que “toda la artillería del mundo no era capaz de igualarle: las aves huían espantadas...el caballo en que iba montado aquel religioso, y los de sus dos compañeros se pararon de repente temblando. En aquel momento se levantó la tierra dos palmos, y así que el Padre volvió los ojos hacia Catanea, no vio más que una negra y espesa nube de humo y

³³⁹ Estimada por aquel entonces en 18014 habitantes.

³⁴⁰ Aún se denomina así a la montaña en la que se encuentra el cono del volcán Etna.

polvo, que cubría el sitio donde estaba la ciudad, la cual fue sumergida en aquel instante³⁴¹”.

Queriendo particularizar la información sísmica para la Península Ibérica, optaron por referir la que proporcionó el prestigioso jesuita Juan de Mariana en su renombrada Historia de España, a sabiendas de que no era completa: “acaso daría de ellos una lista más puntual, si tuviera a mi disposición los historiadores de ambas Monarquías. Pero se puede afirmar con bastante fundamento que jamás han padecido temblores de tierra tan furiosos, como los que acabamos de referir”. La primera catástrofe de la serie es la que se produjo, al parecer, el año 405 de la fundación de Roma³⁴², padeciendo la población de Sagunto la ruina mayor. No obstante, la descripción del fenómeno fue demasiado genérica: “después de extraordinarias inundaciones con increíble daño de los ganados, campos y edificios, padecieron violentos terremotos todas las ciudades que están a orillas del Océano y Mediterráneo”.

Mariana dio también noticias acerca de otras desgracias que padeció la península, contándose entre ellas “los ordinarios temblores de tierra, con los cuales una parte de la isla de Cádiz, dice, se abrió y hundió en el mar”. Cuando Aníbal salió de Hispania, en el año 218 a.C., también se soportaron “varias enfermedades, pestes, temblores de tierra y tormentas”. Se abre entonces un paréntesis en la crónica sísmica, el cual no se cerró hasta que se refirió el terremoto de Lisboa del año 1344, reinando Alfonso IV: Al parecer fue acompañado de un ruido ensordecedor y de continuas sacudidas de sus edificios, llegando a colapsar el cimborrio de su iglesia mayor. El mismo autor recoge asimismo el que se registró en 1356: “...con grande daño de las ciudades marítimas, cayeron las manzanas de hierro que estaban en lo alto de la torre de Sevilla³⁴³; y en Lisboa derribó este terremoto la Capilla mayor, que pocos días antes se acabara de labrar por mandado del Rey Don Alfonso”. A finales del siglo, en diciembre de 1395,

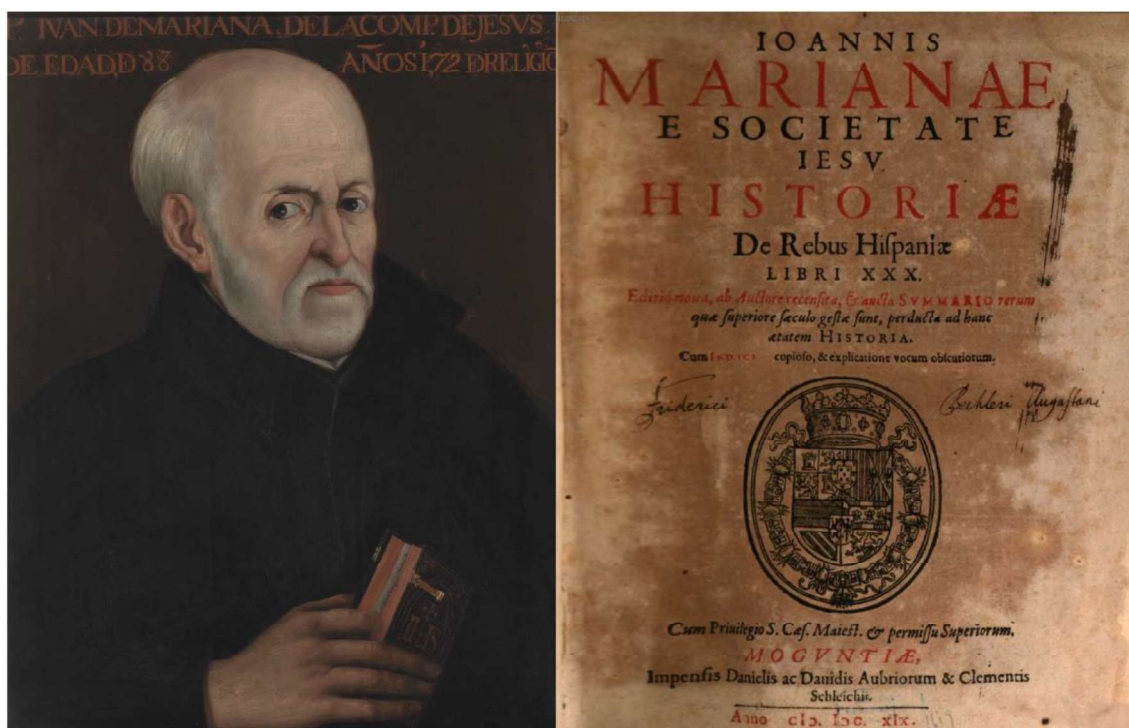
³⁴¹ La primera descripción de este gran sismo fue realizada por el médico italiano Domenico Bottone, el cual escribió, en ese mismo año de 1693, el manuscrito *Idea histórico-physica de magno Trinacriae terrae motu*. En él se apoyó para publicar *De Immani Trinacriae Terremotu* (1718), trabajo incluido en las *Philosophical Transactions* de la *Royal Society*, institución a la que pertenecía desde el año 1697; en él se apoyó el autor portugués para hacer su reseña de este terremoto.

³⁴² Dando por sentado que Rómulo fundase la ciudad de Roma en el año 753 a.C. el terremoto habría tenido lugar en el año 348 a.C.

³⁴³ En la crónica de Ibn Sahib al-Salá se cuenta que las obras de la Torre de la Giralda concluyeron el 10 de marzo de 1198, con la colocación de cuatro bolas de bronce dorado en el remate superior de la misma (Falcón Márquez, Teodoro. La Giralda. Diputación de Sevilla, Área de Cultura.)

quedó muy afectado por otro sismo la mayoría del reino de Valencia, “con tanta desolación de los vivientes y los edificios, que era maravilla y lástima”.

Destaca, en este relato histórico, el gran terremoto del año 1531, el cual no solo fue notado en toda la península; Mariana señalaba que gran parte de los diques de Flandes resultaron afectados, quedando muchos lugares anegados con las olas del mar. A tenor de su testimonio, los mayores efectos se apreciaron en Lisboa³⁴⁴, donde la madre por la que circulaba el Tajo “se hinchó de tal manera que, apartándose las aguas de la una y otra parte, parecía resultar una manera de isla”; se estima que quedaron arruinadas 1400 casas, quedando 600 más incapaces de ser habitadas, siendo muchas las iglesias que se derrumbaron.



Juan de Mariana y su libro sobre la Historia de España. En él incluyó una relación de los terremotos históricos que asolaron la península ibérica. El libro se editó en Maguncia en el año 1605, pero mientras tanto fue traduciendo la obra al castellano, publicándose en Toledo en el año 1601.

Es muy probable que la inclusión del anterior listado, con algunos de los temblores históricos más notables, fuese una de las muchas consecuencias que trajo consigo el gran terremoto de Lisboa, el cual conmocionó

³⁴⁴ El rey Juan III, ante el riesgo de que “le tomase la casa debajo, por muchos días fue forzado a alojarse en tiendas y pabellones en el campo”.

profundamente a la sociedad ilustrada de su tiempo; así parece desprenderse, al menos, del párrafo siguiente, que concluye con un emotivo canto a la ciudad:

“lo referido hasta aquí manifiesta que desde el año de 1344 Lisboa ha sido maltratada por cuatro terremotos considerables, y que las circunstancias del que hubo en 1531 fueron puntualmente las mismas que las del día 1 de Noviembre próximo pasado. Pero este fue tanto más lastimoso que los antecedentes, cuanto más dignos son de que no quede rastro de ellos en la memoria de los hombres aquellos malvados que atizaron el fuego de la ciudad, el cual consumió lo que se había libertado de la furia de los demás elementos. Desgraciada Lisboa, ¡cuán mal te vendría hoy día el nombre de DICHOSA³⁴⁵! ¡Con cuan poca razón te llamaría hoy día Plinio MEMORABLE CIUDAD ROMANA³⁴⁶! Ni el temple apacible de tu clima, ni la amenidad de tus campos, ni la bondad de tus aguas³⁴⁷, te han podido libertar de quedar sepultada en pocas horas en tus ruinas”.

La sospecha apuntada antes se convierte en certidumbre cuando se leen las primeras consideraciones formuladas por el autor al referirse a las causas de los terremotos; no obstante juzgue el propio lector:

“Tengo por superfluo copiar aquí la...descripción que trae Plinio de los terremotos, porque discurro quedan bien conocidos estos fracasos con la relación que de ellos dejamos hecha. Aquí sería el lugar de pintar el último que atemorizó casi toda Europa, y causó tantos estragos en Portugal, y en las costas occidentales de África; pero como parece que estos fenómenos no han llegado todavía a su último término³⁴⁸, trataré entre tanto de sus causas, procurando aliviar por este medio la aflicción que siente el ánimo acongojado y si esta indagación fuese de algún alivio para mí, espero que también lo sea para los demás la lectura de lo que voy a decir”.

³⁴⁵ (Jan Gruter) Gruterus. Inscript ppp 252-261. FELICITAS IULIA OLISSIPO

³⁴⁶ *Oppida memorabilia a Tago in Ora Olissipo. Municipium civium Roma, felicitas Iulia cognominatum.* Lib. IV. Cap. 22. En la traducción de Francisco Hernández (Médico de Felipe II) se lee: ...es la quinta (*colonia*) Escalabis, que también se llama Presidio Julio (*Trujillo*), Olisipo, municipio de ciudadanos romanos, dicho Felicidad Julia.

³⁴⁷ En el texto original se incluye una interesante nota etimológica. Al parecer Lisboa podría derivarse de la antigua palabra latina *Lix* que significa agua. De ahí que *Lixbona* o *Lisboa* equivaliese a *Buena agua*.

³⁴⁸ La importancia del testimonio de este médico portugués es incontestable, puesto que se trata de un relato en el que se reflejan todavía las primeras emociones tras la catástrofe; unos sentimientos muy a flor de piel, ya que la Tierra seguía temblando.

Las causas de los terremotos fueron analizadas por el autor en los cuatro apartados que se indican a continuación: a) *Experimentos con los licores químicos y otros cuerpos*, b) *Fuerza del aire encerrado*, c) *Fuerza de los vapores y las exhalaciones en lo interior de la Tierra*, d) *La causa de los terremotos, relámpagos y truenos es una misma*. La introducción del primero resulta obvia, tras la afirmación con que comienza su desarrollo: “no es mi empeño señalar con evidencia la verdadera causa de los terremotos, solo si darla a conocer cuánto cabe por analogía”. Del segundo es destacable su conclusión, acorde con el pensamiento aristotélico: “de lo dicho se deduce que para causar terremotos basta que el aire se dilate en lo interior de la Tierra. Si atendemos a la multitud de cuerpos que hay allí, que contienen aire, el cual ocupa después de dilatado un espacio 400 veces mayor que el volumen de los mismos cuerpos, y al calor central, nos persuadiremos a que ha de obrar efectos más poderosos que los de la pólvora”.

Nuevamente cita Bails la obra más conocida del conde Buffon, al comienzo del penúltimo apartado, para recordar que todos los estudiosos de la Historia Natural defienden la existencia de cavernas en el interior de la Tierra, “...y principalmente debajo de las montañas, cuyas concavidades son resultas de los terremotos, o de la caída de alguna peña...También se da por cierto que en lo interior de la Tierra hay fuego³⁴⁹, el cual se nos da a conocer con la impresión del calor, y es tanto más activo cuanto más abajo está”. Más adelante se recuperó el discurso de los clásicos elementos, al señalar que en el interior de la Tierra se encontraban “los dos agentes más universales y constantes de la naturaleza, que son el fuego y el agua”. Los vapores engendrados por los dos eran, a juicio de Bails, los causantes de la disolución de muchos cuerpos y de la aparición de otros nuevos; produciéndose entonces “inmensidad de aire y de exhalaciones sulfúreas, las cuales como no hallen respiradero hasta la superficie de la Tierra, es preciso que se introduzcan y corran por las aberturas y cavidades

³⁴⁹ Se incluye en el relato una curiosa aproximación al gradiente geotérmico: “al paso que nos vamos acercando al centro de la Tierra, hallamos un calor mayor, porque a la profundidad de 52 toesas el termómetro sube diez grados más arriba del grado de la helada, o congelación; a la profundidad de 222 toesas sube a 18 $\frac{1}{6}$ grados. Si crece el calor siguiendo esta proporción, es preciso que a la profundidad de una legua de 300 toesas, sea de 244 grados, cuyo calor es mucho mayor que el del agua cuando cuece: los terremotos se forman por lo regular debajo de la mar, que no tiene de profundo menos de una legua. En virtud de la misma proporción el calor central a la profundidad de tres leguas será tan grande como el que derrite los metales: el hierro se derrite con un calor de 800 grados en el termómetro de Fahrenheit”.
 Recuérdese que la escala centígrada y la del sabio polaco cumple la relación siguiente: $\frac{1^{\circ}\text{C}}{100} = \frac{1^{\circ}\text{F}-32}{180}$.

subterráneas...hasta salir por las grietas y boquerones de la Tierra. Los terremotos que principiaron en Asia, y corrieron todas las costas del mar Mediterráneo, eran de esa naturaleza, como el último que acabamos de experimentar en Europa³⁵⁰”.

Bajo ese mismo epígrafe se explicaba el origen y evolución de las coladas volcánicas, en los siguientes términos:

“si las mismas exhalaciones y vapores despedidos de las materias sulfúreas...mezcladas unas con otras en una anchurosa cavidad...tapadas todas las grietas con betunes...piedras piritas, bórax³⁵¹ nativo, y otras sales ácidas o alcalinas, llegaran a encenderse, será forzoso reviente como una mina y arroje por los aires cenizas desde Nápoles a Constantinopla, que salen de las piedras y peñas ardiendo, calcinadas y vitrificadas, las cuales abrasarán y destruirán muchas leguas de tierra alrededor, y que se transformen en llamas luego que llegaren a nuestra atmósfera, y corran aquellos torrentes de materias derretidas, que los Napolitanos llaman *Lava*”.

De acuerdo con las tesis defendidas por el naturalista francés, se atribuía a esa causa la aparición de islas tales como la de Santorini o las Azores, “causando al mismo tiempo horribles terremotos”.

Continuando con la supuesta y estrecha conexión entre la sismología y la meteorología, se llegaron a relacionar los terremotos con fenómenos tan dispares como las auroras boreales, los rayos y los truenos: “las causas de los terremotos y volcanes lo es también de las auroras boreales, de las estrellas que llamamos exhalaciones³⁵², de los globos de fuego, de los relámpagos, truenos y rayos”. Más adelante se insistía sobre este mismo asunto, apelando a una simple reacción química:

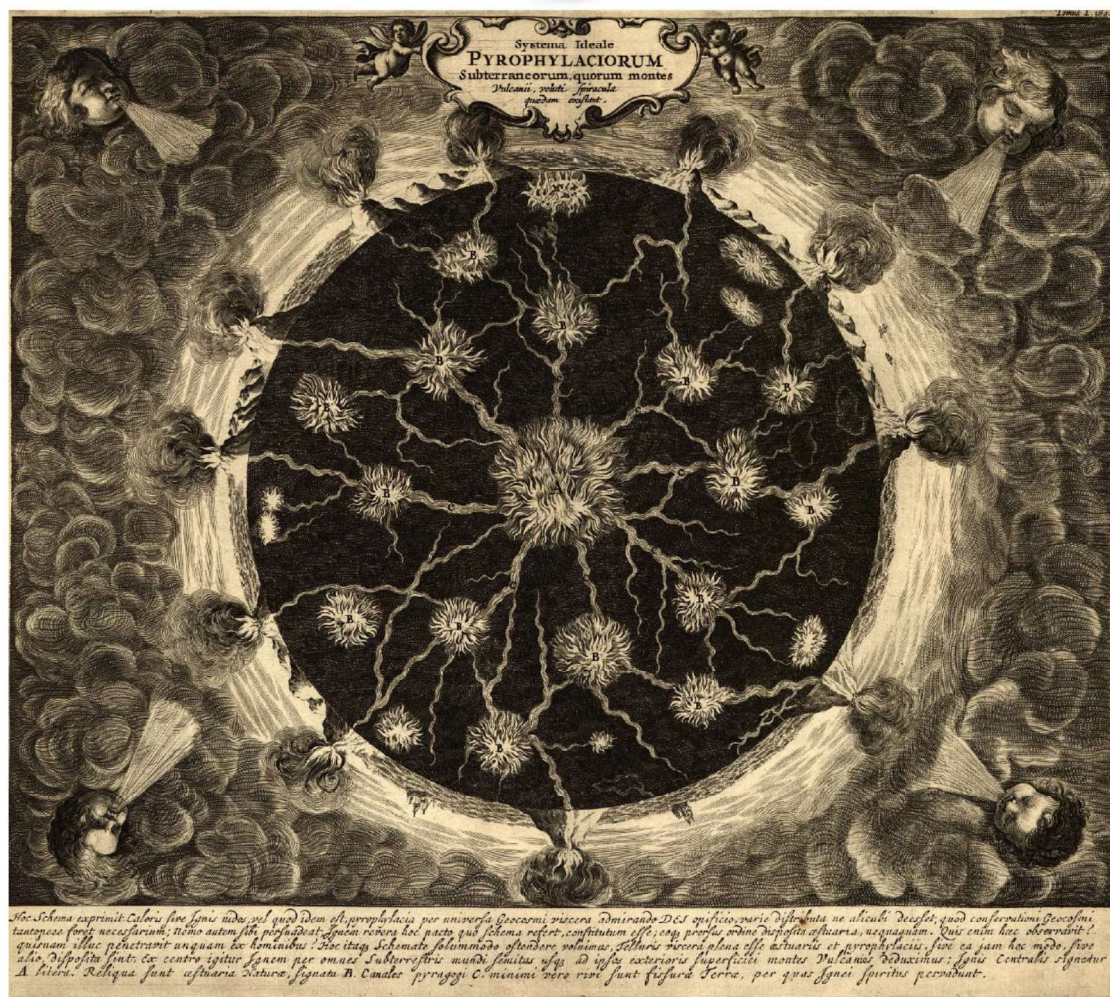
“de todo lo dicho se infiere con evidencia que los terremotos, volcanes, relámpagos, truenos, rayos y las tempestades, provienen de una misma causa; porque las materias bituminosas y ferruginosas se mezclan con las ácidas, y los vapores, sea en las entrañas de la Tierra, sea en la atmósfera. A esto se agrega el impulso del fuego central, o del que hay en la

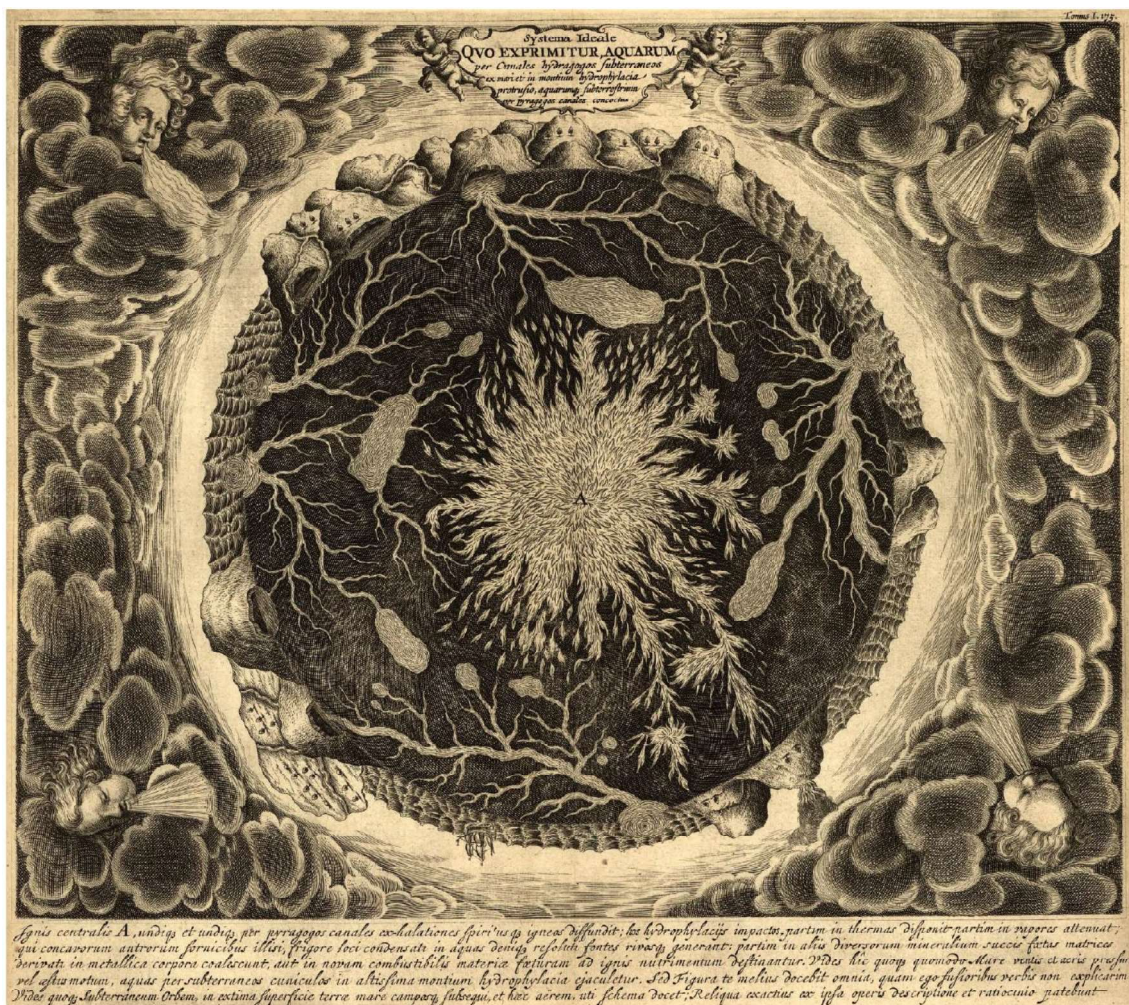
³⁵⁰ Se estaba refiriendo, obviamente, al gran terremoto que destruyó Lisboa el 1 de noviembre del año 1755.

³⁵¹ Borato de sodio hidratado.

³⁵² Antigua denominación del fenómeno de los meteoros, conocido comúnmente con el nombre de estrellas fugaces.

atmósfera, agitada de los vientos; ponénse con esto en movimiento dichas materias, habiendo entre ellas una especie de lucha: críase entonces mucho aire y se forman muchas exhalaciones...de aquí provienen efectos tan violentos”.





Los conductos subterráneos y el fuego central en la obra de Athanasii Kircheri: Mundus Subterraneus, quo universae denique naturae divitiae (1664-1678), la cual fue considerada en su momento como la mejor ilustrada del siglo XVII.

Noticia del terremoto que empezó a sentirse en Europa, África y América, desde el día 1 de Noviembre de 1755. Así tradujo Bails el epígrafe con que inició su crónica del sismo de Lisboa el autor luso Ribeiro Sánchez, aunque en realidad incluyese en ella otros asuntos igualmente relacionados con la sismología: geografía sísmica, construcción antisísmica y prevención. La importancia de este documento radica principalmente en que se redactó cuando solo habían transcurrido poco más de dos meses y medio de tan terrible suceso, el propio autor lo certificó indirectamente con estas palabras: “Mi empeño no es dar una historia puntual del terremoto que principió el día 1 de Noviembre del año pasado,..., no solo porque me faltan relaciones circunstanciadas formadas por personas inteligentes, sino también porque estoy formando esta relación, o noticia a 19 de Enero de 1756, a cuyo tiempo parece que dura todavía”.

Indudablemente, el gran terremoto de Lisboa fue uno de los sismos catastróficos que mereció la mayor atención del mundo ilustrado³⁵³, suscitándose un interesante debate sobre el posible antagonismo entre la infinita bondad divina y la ocurrencia de eventos naturales extraordinarios que ocasionan miles de víctimas³⁵⁴. De entre todas las controversias surgidas, merece ser recordada la protagonizada por François Marie Arouet³⁵⁵ y Jean Jacques Rousseau, haciéndose el primero de ellos la siguiente pregunta ¿Más como concebir un Dios, la bondad misma, que prodigó sus bienes a los hijos que ama, y derramó sobre ellos el mal a manos llenas³⁵⁶? A pesar de los muchos años transcurridos, aún sobrecoge la lectura de la descripción efectuada en esta obra de Bails:

“el día 1 de Noviembre de 1755, entre nueve y diez de la mañana, estando el cielo claro y sereno, y la atmósfera más caliente de lo que correspondía a la estación, empezó el terremoto de Lisboa, con tanta violencia, que en siete minutos derribó, o abatió la mayor parte de los majestuosos edificios que eran el ornamento de aquella capital. Por ser el día de Todos los Santos, la mayor parte de sus vecinos estaban en las Iglesias, que padecieron más que los otros edificios, quedando con esta ocasión sepultadas muchísimas personas de ambos sexos. Además de la pérdida de tantas vidas, causada por la ruina de las casas, la de los bienes fue inmensa; porque fuese por casualidad, u obra de algún malvado, a eso de las doce del día apareció toda la ciudad en llamas, cuya violencia duró cuatro días. Las aguas del Tajo que bañan la ciudad, se retiraron de la playa con ímpetu, y como en la parte más angosta tiene allí su madre una legua de ancho, al volver las aguas se echaron con tal violencia en la parte baja de la ciudad, que lo anegaron y destruyeron todo hasta donde llegaron. Hasta las diez de la noche se sintieron sacudidas en la Tierra, bien que menos violentas, habiéndose retirado ya todas las personas al campo, donde muchas viven todavía”.

³⁵³ El médico portugués creía que había sido “uno de los más universales terremotos que las generaciones venideras leerán en sus historias”. Este sismo fue desde luego el primero que se estudió desde un punto de vista exclusivamente científico, de ahí que a partir de ello se iniciase el verdadero desarrollo de la sismología moderna.

³⁵⁴ El mismo autor refería que la mayoría de las víctimas se encontraban oyendo misa, por ser la fiesta de todos los santos.

³⁵⁵ Más conocido por el pseudónimo *Voltaire*.

³⁵⁶ La pregunta la incluyó, el genial enciclopedista en su celebrado: *Poème sur la destruction de Lisbonne ou examen de cet axiome, Tout est bien*. (1756), el cual solo es un exponente más de como resultaron sacudidas muchas conciencias de la época. La relevancia del mismo ha hecho que se incluya como anexo número III.

Por supuesto que el temblor fue percibido en toda la Península Ibérica³⁵⁷, resultando especialmente afectadas iglesias y monumentos de diferentes localidades; más singulares fueron sus efectos colaterales en puntos tan alejados como las costas irlandesas o los lagos escandinavos, clara evidencia del carácter global de este tipo de fenómenos geológicos. En la obra se da buena cuenta de lo ocurrido en Setubal, donde además de notarse con especial intensidad sufrieron un gran maremoto: “el mar se retiró rapidísimamente de la playa, adonde habían ido a buscar amparo los vecinos atribulados con tan extraño suceso³⁵⁸: volvió después el mar con portentosa velocidad, y anegó y cegó aquello riquísimo Puerto con los habitantes que se habían refugiado en la playa, no habiendo edificio alguno, ni público, ni privado, que resistiese a tan extraordinario ímpetu”. Asimismo refirió otras poblaciones, especialmente de Andalucía occidental, concretando que en Sevilla “hizo bastante estrago en los edificios más considerables y mató algunas personas”; también mencionó el maremoto que asoló las costas atlánticas de la región: “en muchos lugares de aquella costa quedaron sepultados muchos vivientes debajo de las olas del mar agitado con violencia”. Bails comentó igualmente que en otras ciudades españolas, como Granada³⁵⁹ y Alicante “se sintió el mismo terremoto el mismo día y hora”.

³⁵⁷ Los efectos del terremoto en España fueron estudiados por el ingeniero geógrafo José Manuel Martínez Solares, en una cuidadosa y completa Monografía del Instituto Geográfico Nacional, publicada en el año 2001: *Los efectos en España del Terremoto de Lisboa: 1 de noviembre de 1755*.

³⁵⁸ Repentinamente surgieron por la ciudad “chorros de agua de extraordinaria corpulencia, tan horribles y con tal furia, que le inundó a la altura de muchas varas”.

³⁵⁹ En mi condición de granadino no puedo dejar de mencionar que en la Biblioteca Nacional de España se conserva un valioso documento, probablemente redactado por un sacerdote, en el que se detallan los desperfectos sufridos por algunas de las iglesias de la ciudad. El documento fue publicado en Sevilla, en el mismo año, por la imprenta de José Navarro y Armijo, con el siguiente título: *Relación de lo acaecido en la ciudad de Granada el día 1 de noviembre de 1755, con el terremoto, que principió entre 9 y 10 de la mañana y duró diez minutos*. El texto comienza con la Catedral “que siendo una obra tan fuerte quebrantó cuatro naves”, de la que salieron despavoridos feligreses y “hasta los sacerdotes que estaban celebrando misa”. En San Antón se torció el capitel de su torre “de tal suerte que se necesita derribarlo, antes que se venga al suelo y haga mayor daño”. En el Convento de Carmelitas calzados “sucedió lo propio” y uno de los muchos yesones que cayeron “rompió un brazo a un muchacho”. Acto seguido se refiere a la Colegiata de San Salvador con estas palabras “ha sido preciso sacar el SSmo. SACRAMENTO, y depositarlo en las Monjas Agustinas, en donde celebran, y rezan las Horas Canónicas, pues dicha colegiata ha quedado incapaz de servir, y está amenazando ruina”. “La media naranja de San Jerónimo se quebrantó toda, y habiendo caído un pedazo de ella, maltrató malamente a un hombre”. “El colegio de Santa Catarina, siendo una Obra muy fuerte, y nueva, ha quedado todo quebrantado”. “En el Monasterio de San Basilio, y Convento de la Santísima Trinidad, los Sacerdotes, que estaban celebrando, dejaron los Altares, y salieron revestidos huyendo a la calle; las Gentes en ellas se caían, como embriagados, unos huían sin saber a dónde, y otros quedaban pidiendo a Dios misericordia a voces; y en fin, el conflicto ha sido general, y quedan todos atemorizados, y de donde más huyen es de las iglesias”. El final de la crónica es curioso, sorprendente y hasta milagroso “...y en la procesión que se hizo en

El terremoto también se dejó sentir, con especial virulencia, en las ciudades del Norte de África. Aunque Ceuta, Tánger y Tetuán resultaran seriamente afectadas, la más perjudicada fue sin duda Mequínéz; tal como lo dejó dicho Bails: “allí perecieron a la misma hora muchísimas personas, junto a la ciudad se abrió la tierra en trecho tan largo, que quedaron enterradas diez mil almas con muchos caballos y camellos, acompañando tanta destrucción ruidos horribles en lo interior de la Tierra”. A los comentarios anteriores se sumaron los que indicaron los acontecimientos extraordinarios observados en las costas bálticas de Alemania y Polonia, así como en lagos suecos y finlandeses. Esta fue la referencia expresa a tales fenómenos:

“En la provincia de Dalecarlia las aguas de las lagunas Frisem, y Stooraled empezaron a agitarse, inundando las orillas y bajándose la tierra todo alrededor, lo que aumentó la inundación. En Pomerania, las lagunas de Netzo, Mukhagast, Reddelin, Libesé, distantes doce leguas de Berlín, y treinta del mar Báltico, salieron de madre con espantoso ruido entre once y doce de la mañana, inundando los campos de alrededor, restituyéndose al cabo de seis horas, con flujos y reflujos a sus antiguos límites”.

Después de mencionar una serie de terremotos ocurridos en diferentes latitudes, durante Noviembre y Diciembre, posibles réplicas del sismo principal, se recoge en esta crónica otra información sísmica relevante, acerca de este: “los navíos que navegaban en el Océano 50 leguas lejos de Cádiz y 150 de Lisboa, experimentaron con la extraordinaria agitación del mar los efectos del terremoto del día primero de Noviembre”.

Las penalidades sufridas por la ciudad de Lisboa continuaron durante todo el año 1755, ya que hasta el 22 de diciembre no cesaron los terremotos, “bien que no han sido tan violentos como los primeros que se sintieron, pagando con tan triste distinción la preeminencia que tenía de ser la más ilustre de cuantas ciudades han padecido el terremoto”. Hoy día, se admite que el gran temblor de tierra, que asoló la capital portuguesa en ese año, fue un sismo múltiple, siendo las coordenadas geográficas del epicentro las siguientes: latitud 36° 30' N. y longitud 10° 00' W.G.); es decir una zona situada en el Océano Atlántico y al SW del cabo de San Vicente. La profundidad del foco se estima entre los 20 y 40 km. El temblor se produjo a las 10^h 16^m (TU), tuvo una duración próxima a los diez minutos y una

Granada de Acción de Gracias, se desprendió el badajo de la Torre de N. Sra. De las Angustias, y dándole a un eclesiástico lo dejó sin lesión”.

magnitud mayor que 7 y menor que 8 en la escala de Richter; se cree que se liberó una energía aproximada de 2.9×10^{17} julios, es decir equivalente a más de quinientas bombas análogas a las de Hiroshima y Nagasaki.



Alegoría del Terremoto de Lisboa, pintada por João Gama Strobërle en torno al 1760. Obsérvense los ángeles con espadas, una metálica y otra de fuego, como si la catástrofe hubiese sido un castigo divino.

Estos breves apuntes sismológicos de Benito Bails incluyeron, tras la descripción del terremoto anterior, una serie de reflexiones que parece oportuno reproducir a pesar de que las tres primeras parezcan en la actualidad un tanto gratuitas. Efectivamente, de acuerdo con la poca información de que se disponía en su tiempo, se aseguraba que los sismos “siempre han sido más terribles y frecuentes en los países que están entre los 45 grados de latitud boreal y meridional”. En segundo lugar se refería a la composición del subsuelo, señalando que “en las tierras que se componen de canteras, mármol, que están cubiertas de peñas, roquedos, o sierras; las que abundan de metales...son las más expuestas a los terremotos”. La tercera repite la explicación meteorológica de estos fenómenos: “parece que todo aquello que impide la transpiración de los vapores y exhalaciones que se forman en lo interior de la Tierra contribuye a causar terremotos. Se tiene observado que luego o poco después de grandes secas, continuadas lluvias, de fríos excesivos y largos, se experimentan temblores de tierra en las regiones meridionales”.



Uno de los muchos grabados del terremoto de Lisboa, realizado en Alemania (ca.1887).

Las siguientes reflexiones son recomendaciones urbanísticas en las que se establecieron ciertas medidas de prevención, tratando de mitigar los efectos de los sismos y muy especialmente los de los maremotos: “parece que siempre que se hubiese de fundar alguna ciudad en comarca expuesta a los terremotos, debería escoger el Gobierno el terreno más ligero, más esponjoso, arenoso...donde se crían árboles, plantándolos en todas las plazas, prados y paseos, después de fundada la población³⁶⁰”. Sin embargo, no parecía estar muy convencido de su eficacia, cuando afirmaba acto seguido “no aseguramos que estas precauciones bastasen a impedir los terremotos, pero es cierto que se experimentarán menos violentos, y con menos frecuencia”. Bails recurrió a las enseñanzas de Platón³⁶¹ para aplicarlas al caso de los maremotos, pues según aquel no debería edificarse ciudad alguna muy cerca del mar, “habiendo de estar a lo menos cuatro leguas lejos...lo mismo de fundar ciudades cerca de los ríos caudalosos, bien que no es necesario plantarlas a tanta distancia de las corrientes”.

³⁶⁰ Bails detallaba inclusive que los árboles deberían ser pinos o álamos, pues ambos “sirven para chupar como otras tantas esponjas, los vapores y las exhalaciones, conforme se ha dicho en el tratado antecedente”.

³⁶¹ Aunque se le atribuya a Platón (Pseudo-Plutarch: *Placita Philosophorum*) la afirmación de que había seis tipos de movimientos: de arriba hacia abajo, de derecha a izquierda, y de atrás hacia delante, no parece muy fiable. La justificación podría ser que Aristóteles no comentase nada al respecto, siendo uno de sus discípulos y habiendo citado a los autores que se pronunciaron sobre estos fenómenos.

Con la última reflexión se aproximaba también el autor a la planificación urbana y a la normativa sísmo resistente, en regiones proclives a la ocurrencia de terremotos:

“lo que pide particular cuidado en semejantes parajes es el modo de fabricar las casas, el multiplicar las plazas y los patios...Todo el mundo sabe que en el Perú, y la Jamaica, parajes donde son frecuentes los terremotos, las casas no tienen más que un piso, y en las que tienen dos, el segundo es de madera ligera: lábranle con vigas largas y corpulentas puestas de canto, las cuales tienen afianzada la mampostería...dejo a la prudencia de quien tocara escoger el método más seguro de fundar y fabricar, y si mi trabajo fuere de alguna utilidad al lector para aliviar algún poco la aflicción y consternación que causan estos movimientos tan estupendos y extraordinarios de la naturaleza, tendré por muy bien empleado el tiempo que en esto he gastado”.

7. ANEXO I

LA FIGURA DE LA TIERRA SEGÚN JOSÉ MARIANO VALLEJO (1779-1846).



José Mariano Vallejo y Ortega nació en Abuñuelas, al Oeste del Valle de Lecrín, cursando allí sus primeros estudios. En el año 1794 se matriculó en la Universidad de Granada para graduarse en Filosofía, trasladándose a Madrid una vez conseguido el título correspondiente. Pronto se acrecienta su interés por las matemáticas, primero como alumno de la Real Academia de San Fernando y luego como catedrático de matemáticas del Seminario de Nobles de Madrid (1802), una prolongación del Colegio Imperial de los Jesuitas. Allí iría recopilando información suficiente para redactar sus dos obras matemáticas fundamentales: *Tratado elemental de Matemáticas* (Mallorca 1812) y *Compendio de Matemáticas puras y mistas*, una excelente publicación, en dos tomos, varias veces reeditada, que se publicó primero en Valencia (1819) y que fue influenciada por la de Benito Bails. Su prestigio se consolidó definitivamente como miembro de la Academia de Ciencias de Barcelona (1813), de la Academia de Ciencias Naturales de Madrid (1834) y como Profesor de Geodesia en la Real Academia de San Fernando.

La importancia de su obra matemática se evidencia por las variadas monografías que han dedicado los especialistas, en la materia, a algunas de sus aportaciones más singulares. En cambio es menos conocida su contribución geodésica, asimismo recogida en su *Compendio*, debiendo destacar el capítulo que dedica a la geometría práctica en el tomo primero. Allí se desarrollan unos conocimientos topográficos sólidos, plasmados en los diferentes planos que confeccionó y en otros trabajos, como la nivelación de los alrededores de Madrid, la medida del perímetro de la corte y la altura de los puentes de Segovia y Toledo. En el segundo tomo hay un capítulo dedicado a la astronomía realmente extenso, describiendo con rigor el estado del conocimiento en su tiempo, al que nos volveremos a referir un poco más adelante.

Vallejo era el prototipo del científico ilustrado que no vivía al margen de la sociedad de su tiempo, así ha de entenderse su participación como representante de Granada en las Cortes Constituyentes de Cádiz (1813. Miembro de la Comisión de Agricultura). Dirigió también el Gabinete Geográfico que había creado Tomás López (1795), por encargo de Godoy. Con la caída del régimen constitucional este científico granadino tuvo que exiliarse en 1823, primero al Norte de España y después a varios países europeos, aprovechando la circunstancia para contactar con los más

eminentes matemáticos de su época: Cauchy, Fourier, Laplace y Legendre, entre otros; los cuales reconocieron el valor de sus investigaciones científicas. De hecho, Valson (biógrafo de Cauchy), cita a Vallejo como uno de los que asistían a las conferencias de ese ingeniero francés, situándolo a igual altura que autores tan renombrados como Dirichlet y Ostrogradsky. A su regreso del exilio, en 1829, se preocupó Vallejo de la reconstrucción física y moral del país, prestando especial atención a la educación general y al fomento de la lectura, luchando contra un analfabetismo que era la principal barrera contra la difusión de la cultura. En el año 1843 fue nombrado Senador vitalicio.

En la obra matemática de este granadino ilustre destaca, por su eminente carácter didáctico, el ya citado *Compendio de Matemáticas*. Dentro de él incluyó el capítulo astronómico, antes referido, que ocupaba las páginas comprendidas entre las 348 y 417, ambas inclusive, de la cuarta edición (Madrid.1840). Uno de sus apartados, el titulado *De la Tierra considerada astronómicamente*, es de claro contenido geodésico, fijándose en él las dimensiones del planeta en estos términos:

“... el esferoide que más concuerda con todas las medidas, es aquel en que el eje mayor de la Tierra, o sea el diámetro del ecuador, es de 15254598 varas , y el eje menor, esto es, la distancia que hay de polo a polo, es de 15209063 varas...Como la diferencia entre los ejes del elipsoide terrestre es solo 45535 varas...si dividimos estas 45535 varas³⁶² por el diámetro del ecuador, que es 15254598 varas, tendremos que $45535/152598$ es lo que se llama el aplanamiento del elipsoide terrestre. Simplificando esta expresión, dividiendo ambos términos por el numerador resulta $1/335$, que es una expresión más sencilla del expresado aplanamiento”.

Aunque el interés de Vallejo por la geodesia fuese incuestionable, parece ser que la cuestión de la forma de la Tierra era objeto principal de sus estudios. Así se desprende, al menos, de una extensa nota a pie de página que incluyó en el capítulo anterior: “...Como de cada una de las medidas de la Tierra que se han ejecutado, resulta un aplanamiento diferente, no estará demás el que presentemos aquí un resumen de cuanto se ha trabajado sobre tan importante materia, y de los diferentes aplanamientos que se han obtenido”.

³⁶² Usando la equivalencia métrica de la vara castellana ($0^m.835$) resultarían los valores siguientes para los dos ejes del elipsoide de revolución: eje mayor ≈ 12737.58933 km, eje menor ≈ 12699.56761 km.

A modo de presentación, realizó Vallejo unos comentarios cargados de sentido y brillantemente resumidos:

“La Teoría de la Tierra se ha considerado en todo tiempo como uno de los más importantes ramos de las ciencias, o al menos como el que tiene más íntima conexión con la existencia material del hombre...Por esta causa, parece que la primera necesidad intelectual de la especie humana era el reconocer la figura de la Tierra, determinar sus límites, y estudiar sus circunstancias. Así es, que desde la más remota antigüedad se hicieron tentativas para medir sus dimensiones; y si los resultados de las primeras mediciones no pueden considerarse en el día como una aproximación poco exacta,..., no podemos dejar de admirar el genio de los que han bosquejado un problema, respecto del cual, todas las fuerzas reunidas de las ciencias modernas no son aún capaces de dar una solución completa y rigurosa. En efecto, para la determinación de la figura y magnitud de la Tierra, se han empleado todos los recursos que ofrecen la Geometría más profunda, y todos los esfuerzos reunidos de la Física más escrupulosa y de la Astronomía más sublime y delicada, pudiendo reducirse a tres los métodos... que se han empleado hasta el día para la solución aproximada de esta importantísima cuestión, y son los siguientes : 1) medidas directas, que son procedimientos puramente geométricos y geográficos, y consisten en medir arcos de meridianos y paralelos sobre diversos puntos de la superficie terrestre ; 2) observaciones acerca de las longitudes de los péndulos que oscilan segundos en diferentes parajes ; y 3) observaciones astronómicas, no solo las que son necesarias en los dos métodos anteriores,...sino las operaciones astronómicas que directamente conducen a inferir el aplanamiento terrestre, por el examen de la influencia que ejerce la Tierra en los movimientos lunares”.

A pesar de que la declaración de intenciones de Vallejo sea más que suficiente para reconocer su importancia, no debe olvidarse que la formulaba en una época en la que, geodésicamente hablando, solo se vivía del recuerdo de las observaciones y cálculos que habían realizado Jorge Juan y Antonio de Ulloa, cien años atrás. El pronunciamiento del matemático parece que también fue muy oportuno, pues se trataba de un tiempo en que había que reivindicar el papel transcendental de la geodesia para conseguir una representación cartográfica del territorio con fiabilidad geométrica. Buen botón de muestra fue la declaración efectuada por el

Ministro de Gobernación (Manuel Cortina y Arendana³⁶³), a propósito del Mapa de España: “...no parece que sea hoy la época de emprender el levantamiento científico de un mapa con aquellas seguridades, exactitud y prolijidad que nos ofrecen los progresos y las aplicaciones de la astronomía, de la física y de la geodesia”.

Vallejo comenzó su discurso geodésico, propiamente dicho, recordando que la esfericidad de la Tierra ya había sido demostrada por Aristóteles, cuando aseguró que su forma se reflejaba en la Luna durante los eclipses, y que, sabida esta, fueron varias las ocasiones en que se trató de hallar el valor de su perímetro. A los 400000 estadios citados por el propio Aristóteles (*De Coelo*), y que según este habrían sido obtenidos por los antiguos matemáticos, añadió los 250000 en que al parecer había fijado Eratóstenes la misma circunferencia de la Tierra. Como era previsible, no dejó de comentar la inconsistencia metrológica de ambas determinaciones, ya que al no concretarse el tipo de estadio empleado como unidad “queda desconocida la magnitud de la Tierra”. Inmediatamente después comentaba Vallejo que “la primera tentativa, hecha por procedimientos científicos³⁶⁴, fue la medida de un grado del meridiano terrestre, ejecutado por los astrónomos árabes en el reinado del califa Mamun”. En su transcurso se midieron directamente las distancias usando el codo como patrón metrológico, aunque tampoco se puedan extraer en ese caso una conclusión cierta sobre las dimensiones de la Tierra, ya que los autores no son unánimes al concretar el tipo de codo empleado³⁶⁵.

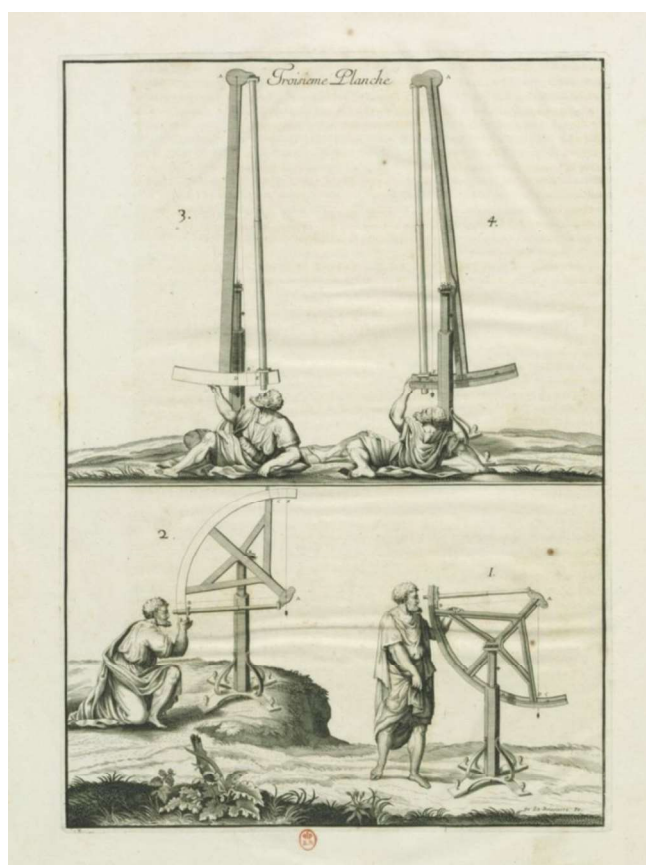
La primera medida de los tiempos modernos citada por Vallejo fue la que efectuó, sobre el luego llamado meridiano de Francia (Amiens-París), el médico Fernel, el cual midió el desarrollo del arco mediante el número de vueltas que habían dado las ruedas de su carruaje; un procedimiento poco aproximado pero con el que obtuvo un resultado nada disparatado, del orden de 57070 toesas por grado (≈ 111.23 km). Tal medida fue el detonante de otras muchas, entre las que sobresalió la realizada por

³⁶³ Decreto del 23 de noviembre de 1840, con el que se acometió definitivamente el proyecto de Mapa de España.

³⁶⁴ El procedimiento empleado por los árabes se basó en los mismos principios que los griegos, aunque sea cierto que quizás aquí se determinase con mayor rigor el desarrollo del arco. Vallejo indicaba que “allí se dividieron en dos compañías, de las cuales una se fue hacia el Norte y la otra hacia el mediodía, midiendo cada una, con el codo en la mano, una línea meridiana geométricamente alineada”.

³⁶⁵ No sería extraño que se usase el llamado codo negro de 27 dedos, puesto que fue ideado por ese mismo califa; en cuyo caso, el desarrollo del grado sería del orden de 63750 toesas (≈ 124.25 km), según el geógrafo Albufeda, es decir alrededor de un 12.5% mayor de lo debido.

Willebrord Snel van Royen (Snellius) en Holanda, ya que fue entonces cuando se empleó por primera vez la triangulación para calcular el desarrollo del arco correspondiente. Sin embargo, las serias discordancias entre los valores proporcionados por todas ellas hicieron que la Academia de Ciencias de París encargase al abate Jean Picard una nueva medida del arco de Fernel, operación que realizó entre 1669 y 1670, tal como recoge Vallejo. Para ello diseñó una cadena de triángulos entre las dos ciudades francesas y obtuvo finalmente el valor de 57060 toesas para el grado³⁶⁶. Aunque la comunidad científica aceptase como buena y definitiva la determinación del abate francés, solo pasaron dos años para que se cuestionara ese modelo esférico de la Tierra.



Instrumentos empleados por Jean Picard en las observaciones angulares del arco de meridiano.

Efectivamente, en el año 1672 y en el transcurso de las observaciones astronómicas que se estaban efectuando en la isla de Cayena (Guayana francesa), comprobó Jean Richer que “su reloj retardaba todos los días cerca de dos minutos y medio sobre el tiempo medio, aunque hubiese dado

³⁶⁶ El perímetro de la Tierra hallado por Picard fue de unos 40036 km, es decir que el valor del radio terrestre resultaba próximo a los 6372 km.

al péndulo la misma longitud que en Francia; y para arreglarlo, se vio precisado a acortar este péndulo una línea y cuarto”. Inmediatamente después, añadía Vallejo: “El anuncio de este fenómeno excitó la admiración de Sabios, pues como las longitudes de los péndulos son como las gravedades, se deducía que la gravedad era menor en la Cayena, que está muy cerca del Ecuador³⁶⁷”. El razonamiento posterior y la conclusión consiguiente merecen ser reproducidos, aunque sean un tanto redundantes por el afán didáctico del matemático:

“El ser menor su gravedad cerca del ecuador era señal de que la fuerza centrífuga, que siempre es opuesta a la gravedad, era allí mayor; y como... las fuerzas centrífugas son como los radios de los círculos en que giran los cuerpos, se llegó a deducir, que *las porciones de la masa terrestre cerca del ecuador tenían menos pesadez, o eran menos pesadas que las más próximas a los polos*; y que, para que se conserve el equilibrio, *era preciso que hubiese más porción de masa hacia el ecuador*, para que la pesantez correspondiente a la mayor cantidad, contrabalancease el peso mayor, que en menor cantidad tengan las porciones hacia los polos; por lo que, según esto, *la Tierra debe hallarse más elevada respecto de su centro, hacia el ecuador que hacia los polos*; y que por lo mismo *su figura debe ser, no una esfera o bola perfectamente redonda, sino un esferoide aplanado, o una bola chata hacia los polos*; y su figura ser parecida a la de una naranja”.

El descubrimiento de Richer fue aprovechado por Huygens y Newton para deducir las consecuencias referidas por Vallejo, apoyándose el primero en su obra *Horologium oscillatorium* y el segundo en su transcendental descubrimiento de la gravitación universal. Si a todo ello se unía la reciente constatación del aplastamiento polar de Júpiter, se comprende que ambos personajes se convenciesen aún más del carácter elipsoidal de la Tierra y que no tardasen en cuantificar el aplastamiento del mismo. Los valores obtenidos también los citaba Vallejo³⁶⁸: 1/578 (Huygens) y 1/231 (Newton).

Acto seguido hacía nuestro protagonista una interesante digresión sobre las reticencias de la Academia de Ciencias francesa, ante semejante novedad y como se convencieron de su existencia:

³⁶⁷ Vallejo fijaba la latitud de Cayena en 4° 46' 17".30 Norte

³⁶⁸ Vallejo hizo un sentido elogio de ambos sabios, que merece ser transcrito: ¡*Loor eterno a los genios privilegiados que saben conocer los principios sólidos científicos y no se dejan arrastrar por las apariencias*!

“después de saber que Halley en 1677 observó en Santa Elena un fenómeno semejante, y también por las observaciones de los Sres. Varin, Deshayes y Glos en la Goréa, Guadalupe y la Martinica en 1682; y las de Couplet en Lisboa y Pará en 1697, así como las del padre Feuillet en Portobelo, y la Martinica, y otras de otros que por ningún título podían atribuirse a las situaciones puramente locales o accidentales, a la variedad de los climas, ni a las anomalías o errores de las observaciones. En virtud de lo cual, para todos los que estaban convencidos de las teorías de Huygens y Newton, no cabía duda en que la Tierra era aplanada por los polos”.

Vallejo explicó a continuación cómo se gestó una de las mayores controversias científicas de la historia, aquella que enfrentó radicalmente a los newtonianos (partidarios del elipsoide oblato, modelo naranja) con los cartesianos (defensores del elipsoide prolato, modelo del limón) y que fue una de las características de la Ilustración. En primer lugar, comentaba que los franceses fueron los más reacios a la hora de aceptar las tesis de Huygens y de Newton, aunque poco a poco fueron convenciéndose por las evidencias tan concluyentes que proporcionaba la variabilidad de la longitud del péndulo. Fue así como se vieron abocados a la evaluación de la curvatura variable del meridiano, apoyándose en el que ya había sido medido en varias ocasiones, es decir en el llamado meridiano de Francia. Para ello se prolongó el arco Amiens-París en los dos sentidos: hacia el Norte (hasta Dunkerque) y hacia el Sur (hasta Colliure³⁶⁹). Cassini I se encargó de observar la triangulación del sector septentrional y La Hire del meridional, comenzando los trabajos de campo en el año 1683 y ultimándose en el 1718, aunque no se publicasen los resultados de los mismos hasta dos años después, en una de sus obras más conocidas: *De la Grandeur et de la Figure de la Terre*.

Los resultados expuestos por Cassini fueron concluyentes, ya que el grado terrestre en el segmento París-Colliure era de 57097 toesas, es decir 37 toesas más que el que había sido medido por Picard. Mientras tanto su hijo Cassini II, había obtenido para el desarrollo del grado, al Norte de Amiens, un valor de 56960 toesas, esto es 137 toesas menos que la magnitud hallada por su padre en el otro sector del meridiano. Como los instrumentos empleados en las observaciones les merecieron toda clase de garantías su conclusión resultaba obvia: *los grados terrestres eran mayores hacia el*

³⁶⁹ En español se traduce por Colibre, siendo ese el nombre usado por Vallejo.

ecuador, tal como se recordaba en la introducción. Vallejo añadía que “atendiendo a que el valor del grado terrestre es la parte del meridiano de la Tierra comprendida por dos líneas perpendiculares al expresado meridiano, y que en su punto de concurso forman un ángulo de un grado, se llega a concluir que en este caso la Tierra debe ser prolongada por los polos y aplanada por el ecuador: consecuencia enteramente contraria a la deducida de las observaciones del péndulo; y que ambas se oponen a que la Tierra sea esférica”.

Un resultado tan contrario a la propuesta de Newton envalentonó a los cartesianos, aunque el sabio inglés no desistiera en ningún momento, al igual que hicieron sus partidarios. Al contrario, Newton no tardó en proporcionar la explicación del mismo, tal como se recoge en esta contribución geodésica del sabio granadino:

“... aunque la medida comprendiese todo el meridiano que atraviesa la Francia, estando unidos los grados de los dos arcos en que se partió la medida, la diferencia del valor y longitud de unos grados a otros era muy corta, y por consiguiente poco sensible y expuesta a confundirse entre los errores a que toda observación está expuesta por más delicada que sea. Y que estos errores podían ser tales que en ellos se envolviese no solo la diferencia de las 37 toesas, en que la medida del Sr. Cassini hacia Colibre excedía a la del Sr. Picard; y la de 137 toesas en que excedía a la de su hijo hacia Dunquerque, sino también la diferencia que debían tener los grados, si la Tierra en efecto fuese aplanada por los polos, según ellos afirmaban”.

Lejos de convencerse los cartesianos, comandados por el académico Jean-Jacques d'Ortous de Mairan³⁷⁰, persistían en la defensa de su modelo prolato. Llegando este a tratar de conciliar las observaciones gravimétricas con el modelo matemático que propugnaba, tal como figura en la memoria que presentó a la Academia de Ciencias, en el año 1720. Su trabajo no tardó en ser rebatido por John Theophilus Desaguliers en los anales de la Royal Society, como bien reseñó Vallejo. Suya fue también la información que daba cuenta del estudio de Clairaut³⁷¹ para demostrar que, en el supuesto del elipsoide con aplastamiento ecuatorial, las disminuciones en la

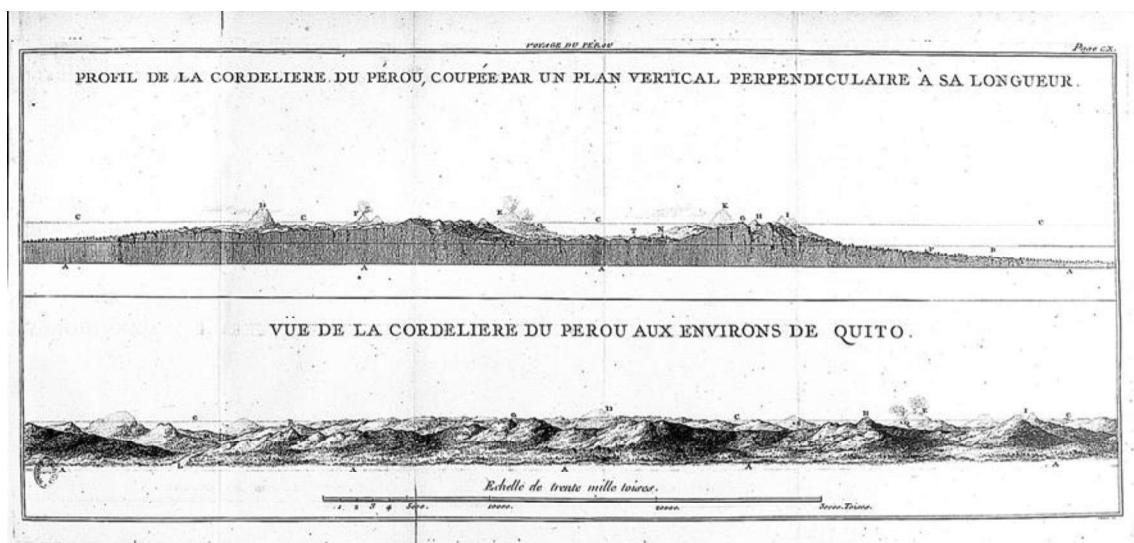
³⁷⁰ Este intentó basar su modelo de elipsoide aplastado por el ecuador en el principio de los torbellinos defendidos por Descartes.

³⁷¹ El estudio de Clairaut lo incluyó en su obra: *Theorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (1743). En este punto tuvo Vallejo un pequeño lapsus, ya que en su contribución da a entender que esta obra fue anterior a las expediciones científicas del virreinato de Perú y de Laponia.

longitud de los péndulos, próximos al ecuador, serían mucho mayores (en torno a 8 o 9 líneas) de las observadas; de manera que *la figura prolongada de la Tierra hacia los polos, sería de todo punto incompatible con las observaciones del péndulo.*

Vallejo resumió muy bien el estado de ánimo en la comunidad científica de Francia, a esas alturas del siglo XVIII:

“...los *Franceses*, cuyo amor propio estaba como comprometido, porque después de cuarenta años de operaciones costosas y de trabajosos afanes, sus resultados estaban en contradicción con los principios científicos, para decidir la cuestión, adoptaron el medio indicado por *Newton*, de medir dos grados del meridiano terrestre los más distantes posible. Y con el objeto de evitar la especie de escándalo científico que resultaba de tales controversias, el Gobierno Francés resolvió que se hiciesen nuevas mediciones, y para que fuesen decisivas, determinó que se midiese un grado cerca del ecuador, y otro cerca del círculo polar”.



Perfiles longitudinales de la cordillera andina, ilustración de la obra de Pierre Bouguer: La figure de la terre: déterminée par les observations de Messieurs Bouguer, & de La Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du roy au Pérou, pour observer aux environs de l'Equateur. Avec une relation abrégée de ce voyage, qui contient la description du pays dans lequel les opérations ont été faites. 1749.

El desenlace final lo resumió también Vallejo, recordando el envío de las dos comisiones: una al Perú y otra a Laponia. La primera, propuesta por el matemático Louis Godin, inició su viaje a la América ecuatorial en 1735 y volvió siete años después; la segunda, propuesta por el matemático Pierre

de Maupertuis, inició su andadura en el año 1736, regresando a Francia dieciséis meses después. Como es sabido, tanto en una como en otra colaboraron representantes de los dos gobiernos respectivos: Jorge Juan y Antonio de Ulloa en el primer caso y Celsius en el segundo. La controversia quedó así superada gracias a las dos expediciones científicas, las dos más divulgadas de la Ilustración, y definitivamente zanjada “*la cuestión a favor del aplanamiento de la Tierra hacia los polos*”, tal como dejó escrito el matemático y geodesta granadino.

A pesar de que Maupertuis³⁷² dejara claro, desde su vuelta a París, que el modelo elipsoidal verdadero era el newtoniano, la Academia quiso refrendarlo mediante una nueva medida del meridiano de Francia, “con instrumentos más exactos, y con mayor delicadeza de la que se había ejecutado precedentemente”. Estas fueron las siguientes palabras de Vallejo:

“Se encargó esta operación a Mr. Cassini de Thury, nieto del que la emprendió por primera vez, y al abate de la Caille; y habiendo estos ejecutado su medida con cuanta precisión y exactitud es imaginable, hallaron que esta se conformaba con las medidas hechas en el círculo polar, y después se vio que iban también conformes con las hechas en Perú, como todo puede verse en las Memorias de la Academia de Ciencias de París, y en la obra que con el título de *La Meridienne de Paris vérifiée*, publicó Mr. Cassini de Thury”.

Elegido ya el elipsoide de revolución, como el verdadero modelo matemático de la Tierra, aún quedaba pendiente la tarea de hallar el valor de su aplastamiento; tarea que no era nada evidente, ya que se necesitaba el concurso de dos arcos de esa superficie. Vallejo sintetizó las determinaciones más señaladas, comenzando con el valor de 1/266 asignado por Jorge Juan, siendo 16895708.5 varas el diámetro ecuatorial de su elipsoide. De nuevo recurrió Vallejo a la obra de Clairaut, ya referida, para recordar que sus estudios sobre el modelo homogéneo de la Tierra le

³⁷² Vallejo reproduce en su contribución geodésica una velada crítica de Maupertuis a los Cassini y a la indecisión del gobierno francés, incluida en su libro *Eléments de la Géographie: Méthode et résultats démontrant la sphéricité et aplatissement du globe aux pôles, rejoignant les théories de Newton*, publicado en París (1742). La traducción de Vallejo fue la siguiente: “Estas medidas fueron repetidas por M.M. Cassini, en diferentes tiempos, en diferentes lugares, con diferentes instrumentos, y por diferentes métodos; el Gobierno hizo prodigamente todos los gastos, y dispensó toda la protección imaginable por espacio de 36 años; y el resultado de seis operaciones, hechas en 1701, 1713, 1718, 1733, 1734 y 1735, fue siempre que la Tierra era alargada y no achatada por los polos”.

permitieron fijar el aplastamiento elipsoidal en $1/231$, un valor prácticamente igual que el obtenido por Stirling³⁷³, $1/230$. Vallejo iluminó esta parte de su exposición con una tabla, en la que incluyó los resultados obtenidos en las mediciones de arco más notables del siglo XVIII, tabla que se reproduce junto a estas líneas.

LATITUD del punto medio del grado	LONGITUD de los grados en toesas	OBSERVADORES Y LUGARES en que se hicieron las medidas meridianas
0° 0'	56753	Bouguer, Godin, La Condamine. Perú
	56767,8	Jorge Juan. Perú
33° 18' Austral	57037	La Caille. Cabo de Buena Esperanza
39° 12' Boreal	56888	Mason y Dixon. Estados Unidos.
43° 1' id	56979	Boscovich y Maire. Est. Pontificios.
44° 44' id	57024	Beccaria. Piamonte.
45° 0' id	57 028	Cassini de Thury, La Caille. Francia
45° 57' id	56881	Liesganig. Hungría. Dudosa.
48° 43' id	57086	Id.
49° 23' id	57069	Picard (corregido). Francia.
66° 20' id	57422	Maupertuis, Clairaut. Suecia.

La dificultad inherente al aplastamiento la explica Vallejo a la perfección: *“De todas estas medidas, resulta comprobado de un modo positivo el aplanamiento de la Tierra por los polos; puesto que la longitud de cada uno de los grados medidos es mayor que la del medido en el ecuador. Pero nada se puede concluir por ellas acerca de la naturaleza de la curva que forma el meridiano, ni sobre la cantidad efectiva del mismo aplastamiento; porque combinándose de dos en dos, se obtienen resultados que difieren mucho entre sí”*. Incluso da unos cuantos ejemplos: comparando el grado ecuatorial con el del círculo polar se obtiene un aplastamiento de $1/213$, comparándolo con el de Picard, se hallaría $1/314$ y si la comparación fuese con el grado austral se llegaría a $1/78$. Vallejo dio cuenta también del estudio de Euler³⁷⁴ sobre este particular y de su cálculo de un aplastamiento igual a $1/230$. La discusión sobre el aplastamiento hizo que abordase también otra cuestión no menos relevante, en la que estaba

³⁷³ El dato lo incluyó en su comunicación a la Royal Society (1733), titulada: *Twelve propositions concerning the figure of the of the Earth*, decantándose en ella por el modelo newtoniano.

³⁷⁴ Aunque Vallejo no lo subrayase, Euler vio evidente la necesidad de seleccionar los datos disponibles, eligiendo solo los más fiables. Fue en ese estudio, presentado en la Academia de Berlín (1753), cuando cuantificó los errores cometidos en las diferentes misiones geodésicas: Laponia (27 toesas), Perú (15 toesas), África (43 toesas) y Francia (125 toesas).

implícito el fenómeno de la desviación de la vertical, la posibilidad de que los meridianos de la Tierra no fueran elipses “ni aún curvas semejantes entre sí”.

Así se expresaba a propósito de las medidas llevadas a cabo, sobre el meridiano de París, por Delambre y Mechain, para el establecimiento del Sistema Métrico Decimal: “se nota en un cierto número de estos grados una marcha irregular, y saltos bruscos, que se separan de la figura elíptica”. Su análisis de tan interesante observación lo concluyó señalando la imposibilidad de entrar en los detalles de todas las operaciones geodésicas para medir los grados terrestres y la conveniencia de reunir en una tabla, aquellas cuyos resultados consideraba exactos. Los datos del cuadro siguiente le valieron a Vallejo para calcular un modelo del elipsoide terrestre, mediante los parámetros que se indican a continuación: eje mayor, o ecuatorial, igual a 12754863 m, es decir 15258734 varas; eje menor, o polar, igual a 12712251 m, es decir 15207757 varas. Siendo su diferencia de 42612 m, resulta que la relación entre sus semiejes era sensiblemente igual a la existente entre los números 298 y 299, de ahí que fijase el aplastamiento en $1/299$, “un poco más grande que $1/300$ ”, según sus propias palabras.

PAISES	AMPLITUD del arco medido	LATITUD del punto medio del arco	DESARROLLO del grado en metros	NOMBRES de los observadores
Suecia	1° 37' 19''	66° 20' 40''	111488	Svanberg.
Rusia	3° 35' 05''	58° 17' 37''	111362	Struve.
Inglaterra	3° 57' 13''	52° 35' 45''	111241	Roy, Kater.
Francia	8° 20' 00''	46° 52' 02''	111211	La Caille, Cassini.
Francia	12° 22' 13''	44° 51' 02''	111108	Delambre, Mechain.
Roma	2° 9' 47''	42° 59' 00''	111025	Boscovich.
Estados Unidos	1° 28' 45''	39° 12' 00''	110880	Mason, Dixon.
Sudáfrica	1° 13' 17''.5	33° 18' 30''	111163	La Caille.
India	15° 57' 40''	16° 08' 22''	110653	Lambton, Everest.
India	1° 34' 56''	12° 32' 21''	110644	Lambton.
Perú	3° 7' 03''	1° 31' 00''	110582	Bouguer, La Condamine.
			110507	Jorge Juan.

Obtenido el aplastamiento polar del elipsoide por la vía de la geodesia geométrica, se centró Vallejo en las otras posibilidades que comentó al comienzo de su estudio: la gravimétrica y la astronómica, aunque de hecho prestase mucha más atención a los resultados logrados por el primer procedimiento; un análisis que iniciaba afirmando que “el aplanamiento terrestre, que resulta de las observaciones del péndulo, posteriores a las que ya hemos citado, no difiere mucho de esta última determinación”. Para añadir después que Louis Mathieu había obtenido un aplastamiento de $1/298.2$, comparando las seis medidas absolutas de péndulo realizadas en estaciones localizadas sobre el meridiano que sirvió de base al Sistema Métrico Decimal. En cuanto al método astronómico, derivado de la influencia terrestre sobre los movimientos lunares, recordaba el valor de $1/304$, que había obtenido Laplace: considerando la atracción de la Tierra sobre los puntos exteriores y valiéndose de las observaciones de Bourg. Asimismo indicaba Vallejo que “los fenómenos de la nutación y de la precesión de los equinoccios no dan a conocer el valor absoluto de la fracción que expresa el aplanamiento, y solo determinan los límites entre los cuales esta fracción se halla comprendida, y son $1/304$ y $1/578$ ”.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE
SUR
LA FIGURE DE LA TERRE.
PAR M. BIOT.

Lu à l'Académie des Sciences, le 5 décembre 1827.

La détermination de la figure de la terre a été, depuis un siècle et demi, l'un des plus constants objets des travaux de l'Académie des Sciences. A partir de la première mesure du degré de Picard, qui servit à Newton pour constater l'existence de la gravitation universelle, les efforts de l'astronomie la plus délicate, de la physique la plus scrupuleuse, de la



Jean Baptiste Biot y portada de la Memoria que presentó a la Academia de Ciencias de París, pronunciándose sobre la forma de la Tierra.

De nuevo incidía Vallejo en la forma real del meridiano terrestre³⁷⁵, recogiendo para ello la opinión formulada, al respecto, por Jean-Baptiste Biot, en la Memoria³⁷⁶ que presentó ante la Academia de Ciencias en diciembre del año 1827. He aquí la traducción del matemático granadino:

“...todos los métodos están conformes y dan a conocer indudablemente, que la Tierra tiene una forma aplanada por los polos y como hinchada o inflada hacia el ecuador, conforme a lo que la analogía indica para el equilibrio de una masa fluida que gira alrededor de un eje, y que en todas sus partes se atraen mutuamente. Pero, que, cuando se quiere ir más allá, y asimilar el esferoide a alguna forma simple, por ejemplo al elipsoide, se descubren irregularidades muy sensibles que no se pueden atribuir a los errores de las observaciones. Cuando se examina de este modo el arco del meridiano que se extiende desde Greenwich a Formentera³⁷⁷, las porciones sucesivas de este arco, consideradas yendo de Norte a Sur, dan decrementos de grados que no guardan absolutamente ninguna ley, ya hacia el grado 46 en particular ofrecen una enorme anomalía. Pero, si el meridiano terrestre fuera elíptico, la latitud media de este mismo arco es tal, que en toda su extensión el decremento sucesivo de los grados debería ser sensiblemente constante.

El arco de paralelo recientemente medido entre Burdeos y Padua presenta fenómenos análogos. Irregularidades semejantes tan grandes como ciertas, se manifiestan también en las diversas partes del arco del meridiano medido por los ingleses en la India, y los Sres. Plana y Carlini han encontrado aún irregularidades más considerables en el Piamonte. Estos ejemplos manifiestan que la figura de la Tierra es mucho más complicada de lo que se creyó en un principio. Por esta causa, es por lo que se ha procurado debilitar la influencia de sus irregularidades, combinando los valores medios de los grados medidos a latitudes muy distantes, y

³⁷⁵En realidad se estaba refiriendo Vallejo al geoide, un vocablo que todavía no se había acuñado (recuérdese que se le atribuye a Listing (1873), un discípulo de Gauss).

³⁷⁶ *Mémoire sur la Figure de la Terre*.

³⁷⁷ Debe recordarse que Biot, en compañía de Arago, fue comisionado por el gobierno francés para que prolongasen el meridiano de Francia, con objeto de poder definir mejor el metro. En el transcurso de aquella operación efectuaron parte del enlace geodésico entre el litoral levantino y las Islas Baleares, aprovechando la ocasión para efectuar observaciones gravimétricas (medidas de la gravedad con el péndulo) en la Isla Formentera. Tales observaciones las continuaría años después dentro de un programa verdaderamente ambicioso. En efecto, siendo consciente de las irregularidades que presentaban los meridianos, decidió completar sus mediciones pendulares para aportar más elementos de juicio al problema de la figura de la Tierra. En su plan de trabajos contempló un nuevo traslado a España, efectuado en el año 1824, esta vez en compañía de su hijo Édouard.

sujetándolos solo a las relaciones elípticas se puede deducir el aplanamiento del esferoide, que se ha encontrado así poco diferente de 1/309.”

Vallejo reprodujo asimismo una de las tablas formadas por Biot, para presentar los resultados de las observaciones pendulares realizadas en Italia y en España, contando con la ayuda de su hijo, completando así las que se habían efectuado sobre el gran arco de paralelo extendido entre Burdeos y Fiume³⁷⁸; también incluyó los previamente obtenidos, por análogo procedimiento, en diversos puntos del meridiano de Francia.

ESTACION	L	λ (mm)	h (mm)	$2h\lambda/r$ (mm)	l (mm)	OPERADOR
UNST	60° 45' 25''	994.943083	8.50	0.002659	994.945742	Biot (padre).
Fuerte de LEITH	55 58 37	994.524453	21.00	0.006565	994.531018	idem.
DUNKERQUE	51 02 10	994.079137	4.00	0.001245	994.080382	Biot, Mathieu.
Observatorio de PARÍS (Sala meridiana)	48 50 14	993.844842	70.25	0.021938	993.866780	Idem y Bouvard.
Observatorio de PARÍS (Sala del mural)	idem	993.826473	63.00	0.013674	993.846147	Borda, Cassini.
CLERMONT-FERRAND	45 46 48	993.455560	406.00	0.126717	993.582277	Biot, Mathieu.
MILAN	45 28 01	993.500800	150.08	0.046842	993.547642	Biot (padre e hijo).
PADUA	45 24 03	993.597710	30.67	0.009584	993.607294	idem.
FIUME	45 19 00	993.563844	64.80	0.020227	993.584075	idem.
BURDEOS	44 50 26	993.447586	17.14	0.005349	993.452935	Biot, Mathieu
FIGEAC	44 36 45	993.388214	223.00	0.069591	993.457805	idem
BARCELONA	41 23 15	993.230852	4.10	0.001279	993.2321312	Biot (padre e hijo)
FORMENTERA	38 39 56	993.006385	202.90	0.063275	993.0696597	idem.
LIPARI	38 28 37	993.076357	9.00	0.002807	993.0791638	Idem.

L es la latitud, λ es la longitud del péndulo simple observada en la estación, h es la altitud sobre el nivel del mar, $2h\lambda/r$ es la corrección por la altitud y l es la longitud corregida del péndulo de segundos en el vacío y a nivel del mar.

Vallejo añadió otro cuadro con datos complementarios, referidos a la variación de la gravedad sobre el meridiano que se extiende desde Unst³⁷⁹ a Formentera, con las observaciones efectuadas en otros puntos del mismo por el capitán Henry Kater, cuyos resultados los transformó en longitudes absolutas, de acuerdo con las observaciones pendulares practicadas por idéntico operador. La tabla la incluyó Biot en la memoria ya citada,

³⁷⁸ La actual ciudad croata de Rijeka.

³⁷⁹ Unst es una de las islas del Norte del archipiélago de las Shetland (al Norte de Escocia).

recogiendo también la longitud absoluta del péndulo en París, en la sala de la meridiana, añadiendo el geodesta granadino: “tal como se concluye del péndulo de Londres, según las oscilaciones de un péndulo de comparación observado por Sabine en estas dos estaciones: lo que acaba de unir los resultados de los dos métodos que se han empleado para la determinación de las longitudes absolutas. Dice también Mr. Biot, que ha aplicado igualmente a estos datos la corrección de altura calculada en virtud del cuadrado de la distancia, como lo hizo en la tabla precedente”.

ESTACION	L	λ (mm)	h (mm)	$2h\lambda/r$ (mm)	l (mm)	OPERADOR
UNST	60° 45' 25''	994.935840	8.50	0.002659	994.938499	Kater
PORTSOY	57 40 59	994.681591	28.67	0.008962	994.690553	idem.
Fuerte de LEITH	55 58 37	994.528685	21.00	0.006565	994.535250	idem.
CLIFTON	53 27 43	994.269356	103.33	0.032286	994.301642	idem.
ARBURY HILL	52 16 55	994.152520	239.87	0.074943	994.2277463	idem.
LONDRES	51 31 08	994.114673	28.20	0.008748	994.123421	Idem.
SHANKLIN FARM	50 37 24	994.024000	73.76	0.023040	994.047040	Idem.
Observatorio de PARÍS (Sala meridiana)	48 50 14	993.838644	70.25	0.021938	993.860582	Kater, Sabine

El significado de las variables es el mismo que el de la tabla anterior.

Continuaba Vallejo, afirmando que de la comparación de las dos tablas anteriores se podía deducir la perfecta concordancia entre las longitudes absolutas en las estaciones de Unst , Leith y París: “sea que se las tome en las medidas directas obtenidas por el método de Borda o que se las concluya del péndulo absoluto del capitán Kater en Londres...una conformidad tan precisa es una segura confirmación de los dos métodos”. La importancia histórica de las mediciones gravimétrica de Biot fue incuestionable, pues a raíz de entonces se contó con el valor absoluto de la gravedad en seis puntos de un mismo paralelo, distribuidos por un arco de 15 grados de extensión, y en otros nueve de un arco de meridiano, con una amplitud angular de 22 grados; a las que habría que sumar las medidas análogas, en siete puntos más, debidas a Kater.

Vallejo terminó su reseña sobre la Memoria de Biot recordando que, a pesar de todo, los valores del aplastamiento deducidos a partir de las observaciones anteriores, “en la hipótesis elíptica, con el auxilio del Teorema de Clairaut”, serían muy diferentes entre sí y dependientes de las

latitudes involucradas. Estos fueron los ejemplos que seleccionó para justificar su comentario: “combinando el valor del péndulo en el polo, que es de 996.188965 mm, con el que corresponde a la latitud de 45° , que es de 993.520351 mm, resulta un aplanamiento de $1/306.33$ ”. Procediendo de forma parecida con las longitudes del péndulo en el paralelo anterior y en el ecuador ($l \approx 991.027015$) resultaría un valor de $1/276.38$. De igual modo, si se comparasen las longitudes propias del polo y del ecuador, se llegaría a $1/290.59$. Esos tres valores merecieron un comentario añadido de Vallejo, ya que en el primer caso coincidía con el obtenido mediante las distancias lunares, el segundo era prácticamente igual al deducido por Louis Claude de Saulces de Freycinet, a partir de la serie de observaciones realizadas entre la latitud 45° y el ecuador; finalmente, el tercero, era muy próximo a $1/289$, el cual había sido deducido por el geofísico irlandés Edward Sabine, apoyándose en todos sus experimentos (desde el ecuador hasta Spitzberg³⁸⁰) y en los que habían sido realizados tanto en Francia como en Inglaterra.

Antes de concluir Vallejo su interesante disertación, reivindicó la importancia de una última campaña geodésica que había sido protagonizada por el ingeniero geógrafo Jean Baptiste Mathurin Brousseau y que había sido resumida en una publicación³⁸¹ de la Biblioteca Universal de Ginebra a finales de marzo de 1840; una circunstancia que dice mucho a favor de su interés por las aportaciones científicas más novedosas. Las observaciones de esa campaña geodésica se practicaron desde los alrededores de Burdeos hasta la zona fronteriza de Saboya, una porción significativa del arco comprendido entre Marennes, en el litoral atlántico, y la península de Istria (Croacia), con una extensión longitudinal de $15^\circ 30'$ aproximadamente. En la correspondiente memoria, obtuvo Brousseau un aplastamiento terrestre de $1/247$, “el aplanamiento más probable del elipsoide osculador de Francia”, una vez relacionados entre sí el valor del grado de paralelo, en el arco Marennes-Ginebra, y el grado del meridiano resultante de la medición del arco Dunkerque-Barcelona.

Vallejo terminó su nota geodésica, emitiendo sus propias opiniones y esbozando ambiciosos proyectos de difícil ejecución; no obstante, dos de

³⁸⁰ Ese vocablo alemán, procede del noruego Spitsbergen, y se refiere a la isla mayor del archipiélago Svalbard, al Norte de Noruega.

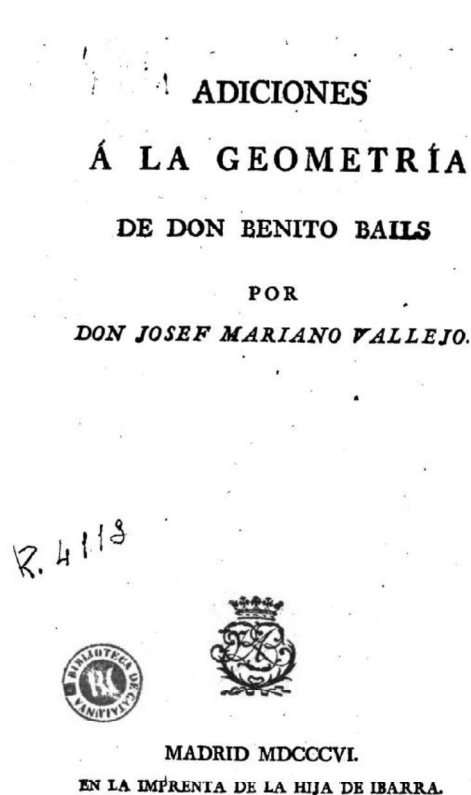
³⁸¹ *Mesure d'un arc du parallèle moyen entre le pôle et l'équateur*. Limoges, F. Chapoulaud, 1839.

ellos no tardaron demasiado en hacerse realidad. En efecto, en 1862, esto es 22 años después de su pronunciamiento, el alemán Johann Jacob Baeyer logró que se constituyera en Berlín la *Asociación para la Medida De Arco en Europa Central*, transformada después en *Asociación para la Medición de Arcos de Meridiano y de Paralelo en Europa* (1867) y en *Asociación Geodésica Internacional para la Medición de la Tierra* (1887), el más directo antecedente de la actual *Unión Geodésica y Geofísica Internacional*, fundada en 1919. En cambio, su deseo de ver prolongado el arco de meridiano³⁸², desde Laponia hasta África del Sur, tuvo que esperar poco más de un siglo, aunque en 1872 se lograra efectuar el enlace astronómico y geodésico entre los continentes europeo y africano, gracias a la gestión y dirección conjunta de Carlos Ibáñez de Ibero y de François Perrier:

“En todo lo expuesto se ven los constantes esfuerzos del entendimiento humano para investigar la figura de la Tierra. Pero todavía falta mucho que hacer para conseguir la resolución de tan importante problema. En mi concepto, debería procurarse comparar la longitud de grados de un mismo meridiano, y no como se ha hecho hasta ahora comparando los grados de meridianos diferentes. Mr. Biot en la Memoria citada manifiesta que ya no son de gran utilidad los experimentos aislados, y lo muy importante que sería el que el arco de meridiano que pasa por Francia y España se prolongase hasta Escocia y que se completase este gran arco europeo haciendo observaciones en África en el establecimiento inglés de Cape Coast, situado muy cerca del ecuador y del meridiano de las islas de Shetland; pero la importancia de la resolución de este problema es de tal naturaleza, que yo juzgo que todos los Gobiernos de los países civilizados deberían reunirse, y escotar cada uno a proporción de su influjo, ó a proporción del número de sus habitantes para medir el mayor arco posible de meridiano y del ecuador; cual sería medir todo el meridiano que resulta de prolongar el arco medido en la Laponia hasta el Cabo de Buena

³⁸² Las medidas de arcos de meridiano se ultimaron con el magno proyecto que permitió unir el Océano Glacial Ártico con Sudáfrica. Para ello, hubo que enlazar previamente el Cairo con la Ciudad del Cabo, de manera que ese desarrollo de 30° unido a la parte más septentrional, que pasaba por Creta, permitió disponer de una cadena triangular extendida sobre 105° aproximadamente. Las operaciones se culminaron a comienzos de la segunda mitad del pasado siglo XX, gracias al permanente trabajo y esfuerzo de los miembros del *Coast and Geodetic Service* de los EE.UU.; aunque se aprovecharon en el proyecto gran parte de las observaciones y triangulaciones efectuadas con anterioridad, destacando sobre todas las demás el gran arco ruso-escandinavo medido entre los años 1816 y 1855, bajo la coordinación de Friedrich Georg Wilhelm von Struve (El Ministerio de Fomento, a través del Instituto Geográfico Nacional acaba de publicar el resumen de tan interesante medida de la Tierra).

Esperanza, lo que podría comprender un arco de meridiano hasta de más de cien grados. Debería también medirse la mayor porción del ecuador que cortase a este meridiano, que viene a ser de unos 35° desde Guinea a la tierra de Ajan; y también la parte de ecuador que atraviesa la América desde el mar pacífico hacia Quito hasta el océano atlántico hacia la desembocadura del río de las Amazonas. Convendría prolongar también el paralelo de 45° hasta el estrecho de la Peruse: con lo cual se tendría el mayor número de datos posible. El realizar este proyecto filantrópico presentaría dificultades; pero nunca serían tantas como otros proyectos más costosos, y cuyo objeto es más bien la destrucción del género humano, que procurar su bien estar y felicidad”.



José Mariano Vallejo a los 46 años de edad, junto a la portada de la obra que ampliaba la Geometría de Benito Bails. La imagen del matemático ha sido amablemente cedida por la Biblioteca del Ateneo de Madrid.

Epílogo

Aunque Vallejo emplease la vara, como unidad de longitud, al fijar la escala del elipsoide terrestre, lo hizo más por la inercia (o comodidad), marcada en la primera edición de su Compendio de Matemáticas, que por

un supuesto desconocimiento del todavía balbuceante Sistema Métrico Decimal³⁸³; de hecho simultaneó su uso con el de los metros y milímetros, como se ha podido comprobar. Si bien la mejor prueba de su interés metrológico sea el comentario sobre tan novedoso sistema, ligado en sus orígenes a la medida de la Tierra, que incluyó en una nueva edición de su Compendio, al tiempo que anunciaba la próxima aparición de un artículo sobre el mismo:

“Pero, además, hay otras razones de mucha consideración, que corroboran la absoluta, indispensable y urgentísima necesidad que hay de proporcionar este conocimiento en una obrita sencilla, clara, exacta y al alcance de todas las inteligencias y de todas las fortunas; y las principales son las siguientes:

1) El sistema decimal o métrico está fundado en la misma naturaleza; pues la medida primordial de todo él, es el METRO, que es la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; 2) es el más filosófico de cuantos han existido; 3) los trabajos que se han hecho para establecerle son los más científicos de que se tiene noticia; 4) los resultados, que han producido, han tenido un considerabilísimo influjo en los adelantos científicos, artísticos e industriales; 5) su conocimiento interesa a todas las clases de la sociedad; pues aún las operaciones domésticas más triviales han recibido ventajas de los resultados que con este motivo se han obtenido. Por lo cual este conocimiento no solo es de la más absoluta necesidad para las relaciones comerciales de ambas Naciones (España y Francia), sino que su vulgarización es una necesidad científica, una necesidad artística, una necesidad industrial, en fin una necesidad social, y hasta un elemento de civilización”.

Más tarde (1840) llegó a publicar el folleto que anunció, con el título siguiente: Explicación del sistema decimal o métrico francés, que por ley de 4 de julio de 1837, se ha mandado establecer en Francia...

³⁸³ Durante 1812, la situación planteada en Francia era la de un dualismo real, reflejado en la doble calibración de medidas y escalas, siguiendo los patrones antiguos y los decimales. Ello se consagró con el decreto de Napoleón declarando válidos los dos sistemas. El problema se agravó aún más cuando Luis XVIII suprimió el Sistema Métrico para restaurar las viejas unidades de medidas, las cuales continuaron en vigor hasta el año 1837, en que fueron definitivamente abolidas al legalizar de nuevo el Sistema Decimal, dándose además facilidades para generalizar su empleo. En lo que respecta a España, fue la reina Isabel II quien promulgó la ley (19.VII.1849) en la que se definía la unidad fundamental de longitud como la diezmillonésima parte del meridiano terrestre que va desde el polo Norte al ecuador, con la denominación de metro. Posteriormente se reforma, al entrar en vigor la Ley de Pesas y Medidas de la reina regente (1892) que instauró el Sistema Métrico Decimal y el metro prototipo internacional de Sèvres como patrón básico de las medidas lineales.

correspondencia de las expresadas unidades francesas con las españolas, y de las españolas con las francesas y modo de hacer la reducción de unas a otras.

8. ANEXO II

BULA DEL PAPA GREGORIO XIII CON LA REFORMA DEL CALENDARIO.



GREGORIUS EPISCOPUS SERVUS SERVORUM DEI AD
PERPETUAM REI MEMORIAM³⁸⁴.

INTER gravissimas pastoralis officii nostri curas, ea postrema non est, ut quæ a sacro Tridentino concilio Sedi Apostolicæ reservata sunt, illa ad finem optatum, Deo adiutore, perducantur³⁸⁵.

I. Sane eiusdem concilii patres, cum ad reliquas cogitationes breviarii quoque curam adiungerent, tempore tamen exclusi, rem totam ex ipsius concilii decreto ad auctoritatem et iudicium Romani Pontificis retulerunt³⁸⁶.

II. Duo autem breviario præcipue continentur, quorum unum preces laudesque divinas festis profestisque diebus persolvendas complectitur, alterum pertinet ad annuos Paschæ festorumque ex eo pendentium recursus, solis et lunæ motu metiendos³⁸⁷.

III. Atque illud quidem felicitis recordationis Pius V, prædecessor noster, absolvendum curavit atque edidit³⁸⁸.

IV. Hoc vero, quod nimirum exigit legitimam kalendarii restitutionem, iamdiu a Romanis Pontificibus prædecessoribus nostris et sæpius tentatum est; verum absolvi et ad exitum perducere ad hoc usque tempus non potuit, quod rationes emendandi kalendarii, quæ a coelestium motuum peritis proponebantur, propter magnas et fere inextricabiles difficultates, quas huiusmodi emendatio semper habuit, neque perennes erant, neque antiquos ecclesiasticos ritus incolumes (quod in primis hac in re curandum erat) servabant³⁸⁹.

³⁸⁴ GREGORIO, OBISPO, SIERVO DE LOS SIERVOS DE DIOS. A LA MEMORIA PERPETUA

³⁸⁵ De entre las muy importantes tareas de nuestro oficio pastoral no es la menor aquella que el Concilio de Trento encargó a la Santa Sede de llevar a buen término, con la ayuda de Dios.

³⁸⁶ Sabiamente, los mismos padres conciliares dedicaron sus últimas reflexiones al breviario, pero por falta de tiempo, decidieron transferir toda esta cuestión a la autoridad y el juicio del Romano pontífice.

³⁸⁷ El tema del breviario contiene, sin embargo, dos partes. La primera comprende las oraciones e himnos religiosos que se deben recitar los días feriados y los laborables, y la segunda trata sobre el ciclo anual de Pascua y otras fiestas que vienen regladas por el curso del sol y de la luna.

³⁸⁸ Acerca de la primera parte ya Pío V, nuestro predecesor de feliz memoria, se preocupó y dictaminó.

³⁸⁹ En cuanto a la segunda, exige de antemano la restauración del calendario, cosa ya intentada repetidas veces, largo tiempo ha, por los romanos pontífices nuestros predecesores; sin embargo no pudo ser llevada a término porque los varios proyectos de reforma propuestos por los expertos en el movimiento de los cielos, además de presentar las dificultades inmensas y casi inextricables que estas correcciones siempre tuvieron, ni eran perennes ni mantenían intactos los antiguos ritos eclesiásticos, lo que en este asunto era la principal preocupación.

V. Dum itaque nos quoque, credita nobis, licet indignis, a Deo dispensatione freti, in hac cogitatione curaue versaremur, allatus est nobis liber a dilecto filio Antonio Lilio, artium et medicinæ doctore, quem quondam Aloysius eius germanus frater conscripserat, in quo per novum quemdam epactarum cyclum ab eo excogitatum, et ad certam ipsius aurei numeri normam directum, atque ad quamcumque anni solaris magnitudinem accommodatum, omnia quæ in calendario collapsa sunt, constanti ratione et sæculis omnibus duratura, sic restitui posse ostendit ut calendarium ipsum nulli umquam mutationi in posterum expositum esse videatur. Novam hanc restituendi calendarii rationem, exiguo volumine comprehensam, ad christianos principes celebrioresque universitates paucos ante annos misimus, ut res quæ omnium communis est, communi etiam omnium consilio perficeretur; illi cum, quod maxime optabamus, concordēs respondissent, eorum nos omnium consensione adducti, viros ad calendarii emendationem adhibuimus in alma Urbe harum rerum peritissimos, quos longe ante ex primariis christiani orbis nationibus delegeramus. Ii cum multum temporis et diligentiae ad eam lucubrationem adhibuissent, et cyclos tam veterum quam recentiorum undique conquisitos ac diligentissime perpensos inter se contulissent, suo et doctorum hominum, qui de ea re scripserunt, iudicio, hunc, præ ceteris, elegerunt epactarum cyclum, cui nonnulla etiam adiecerunt, quæ ex accurata circumspectione visa sunt ad calendarii perfectionem maxime pertinere³⁹⁰.

VI. Considerantes igitur nos, ad rectam paschalis festi celebrationem iuxta sanctorum patrum ac veterum Romanorum pontificum, præsertim Pii et Victoris primorum, necnon magni illius oecumenici concilii Nicæni et aliorum sanctiones, tria necessaria coniungenda et statuenda esse: primum,

³⁹⁰ Así pues nosotros, aunque indignos, fortalecidos por la autoridad de Dios, abordaremos también estas reflexiones; nuestro dilecto hijo Antonio Lilio, doctor en ciencias y medicina nos aportó un libro que escribiera su hermano alemán Luis, en el cual demostraba que por medio de un nuevo ciclo de epactas por él inventado y que por una parte utilizaba sus propias reglas muy precisas para el número áureo y por otra se adaptaba a toda la duración del año solar, se podían corregir todos los defectos del calendario de una manera coherente y que duraría hasta el fin de los siglos de modo que nunca más fuese expuesto a nuevos cambios. La razón de esta nueva rectificación del calendario se halla comprendida en un pequeño volumen que se ha enviado hace pocos años a los príncipes cristianos y a las universidades más destacadas, para que lo que es común a todos se lleve a cabo por el consenso de todos; habiéndonos manifestado éstos su consentimiento, como vivamente deseábamos, reforzados con este acuerdo, hemos hecho venir a la urbe santa a hombres muy expertos en la materia, a los cuales hace tiempo que habíamos seleccionado de entre las naciones más importantes del orbe cristiano. Estos, después de haber consagrado diligentemente mucho tiempo a estas elucubraciones y de haber discutido entre ellos los ciclos que habían recogido de todas partes, tanto de los autores antiguos como de los modernos que habían tratado la materia, han elegido preferentemente, con la reflexión y el parecer de hombres sabios, este ciclo de epactas, añadiendo algunas cosas que les han parecido pertinentes para la realización de un calendario perfecto.

certam verni æquinoctii sedem; deinde rectam positionem XIV lunæ primi mensis, quæ vel in ipsum æquinoctii diem incidit, vel ei proxime succedit; postremo primum quemque diem dominicum, qui eandem XIV lunam sequitur; curavimus non solum æquinoctium vernum in pristinam sedem, a qua iam a concilio Nicæno decem circiter diebus recessit, restituendum, et XIV paschalem suo in loco, a quo quatuor et eo amplius dies hoc tempore distat, reponendam, sed viam quoque tradendam et rationem, qua cavetur, ut in posterum æquinoctium et XIV luna a propriis sedibus numquam dimoveantur³⁹¹.

VII. Quo igitur vernum æquinoctium, quod a patribus concilii Nicæni ad XII Kalendas Aprilis fuit constitutum, ad eandem sedem restituatur, præcipimus et mandamus ut de mense Octobri anni MDLXXXII decem dies inclusive a tertia Nonarum usque ad pridie Idus eximantur, et dies, qui festum S. Francisci IV Nonas celebrari solitum sequitur, dicatur Idus Octobris, atque in eo celebretur festum Ss. Dionysii, Rustici et Eleutherii martyrum, cum commemoratione S. Marci papæ et confessoris, et Ss. Sergii, Bacchi, Marcelli et Apuleii martyrum; septimodecimo vero Kalendas Novembris, qui dies proxime sequitur, celebretur festum S. Callisti papæ et martyris; deinde XVI Kalendas Novembris fiat officium et missa de dominica XVIII post Pentecostem, mutata litera dominicali G in C; quintodecimo denique Kalendas Novembris dies festus agatur S. Lucæ evangelistæ, a quo reliqui deinceps agantur festi dies, prout sunt in calendario descripti³⁹².

³⁹¹ Hemos considerado pues, que para la correcta celebración de las fiestas de Pascua, según los santos padres y los anteriores romanos pontífices, especialmente Pío y Víctor primeros y por los padres conciliares, notablemente los del gran concilio de Nicea, tres cosas deben ser consideradas y establecidas: en primer lugar la fecha precisa del equinoccio vernal, después la fecha exacta del día catorce que coincide con el equinoccio o inmediatamente después y por último el primer domingo que sigue a este mismo día catorce de la luna. Así no sólo hemos atendido a que el equinoccio vernal vuelva a su fecha en la que lo estableció el primer concilio de Nicea y a que el día decimocuarto de la luna de Pascua vuelva a su sitio justo del que se encuentra ahora alejado más de cuatro días, sino también a que sea establecido un sistema metódico y racional que impida que nunca más el equinoccio y la luna y su día catorce sean desplazados de sus posiciones correctas.

³⁹² Con el fin, pues, de que el equinoccio vernal, que fue fijado por los padres de Nicea en el doce de las calendas de abril, sea repuesto en su fecha, prescribimos y ordenamos que sean suprimidos del mes de octubre del año 1582 los diez días que van desde el tercero de las nonas hasta la víspera de los Idus ambos inclusive, y que el día que seguirá a las nonas en que tradicionalmente se festeja a San Francisco, sea llamado Idus de octubre y que sea celebrada en este día la fiesta de los santos mártires Dionisio, Rústico y Eleuterio, así como la memoria de San Marcos papa y confesor y de los santos mártires Sergio, Baco, Marcelo y Apuleyo; que se celebre al día siguiente, el diecisiete de las calendas de noviembre, la fiesta de San Calixto, papa y mártir; que sea, además celebrado el decimosexto de las calendas de noviembre, el oficio y la Misa del decimooctavo domingo después de Pentecostés, pasando la letra dominical de G a C; y por último que la fiesta de San Lucas Evangelista se celebre el día decimoquinto de las calendas de

VIII. Ne vero ex hac nostra decem dierum subtractione, alicui, quod ad annuas vel menstruas præstationes pertinet, præiudicium fiat, partes iudicum erunt in controversis, quæ super hoc exortæ fuerint, dictæ subtractionis rationem habere, addendo alios X dies in fine cuiuslibet præstationis³⁹³.

IX. Deinde, ne in posterum a XII Kalendas Aprilis æquinoctium recedat, statuimus bissextum quarto quoque anno (uti mos est) continuari debere, præterquam in centesimis annis; qui, quamvis bissextiles antea semper fuerint, qualem etiam esse volumus annum MDC, post eum tamen qui deinceps consequentur centesimi non omnes bissextiles sint, sed in quadringentis quibusque annis primi quique tres centesimi sine bissexto transigantur, quartus vero quisque centesimus bissextilis sit, ita ut annus MDCC, MDCCC, MDCCCC bissextiles non sint. Anno vero MM, more consueto dies bissextus intercaletur, Februario dies XXIX continente, idemque ordo intermittendi intercalandique bissextum diem in quadringentis quibusque annis perpetuo conservetur³⁹⁴.

X. Quo item XIV paschalis recte inveniatur, itemque dies lunæ, iuxta antiquum Ecclesiæ morem ex martyrologio singulis diebus ediscendi, fideli populo vere proponantur, statuimus ut, amoto aureo numero de calendario, in eius locum substituaturs cyclus epactarum, qui ad certam (uti diximus) aurei numeri normam directus, efficit ut novilunium et XIV paschalis vera loca semper retineant. Idque manifeste apparet ex nostri explicatione calendarii, in quo descriptæ sunt etiam tabulæ paschales secundum priscum Ecclesiæ ritum, quo certius et facilius sacrosanctum Pascha inveniri possit³⁹⁵.

noviembre, tras la cual se sucederán los otros días de fiesta de la manera como se describen en el calendario.

³⁹³ Para que, verdaderamente, esta supresión de diez días, no perjudique a quienquiera que deba efectuar pagos mensuales o anuales, corresponderá a los jueces, en cualquier litigio que pudiera resultar, tenerlo en cuenta añadiendo otros diez días al vencimiento de cualquier pago.

³⁹⁴ A continuación, con el fin de que el equinoccio, en lo venidero, no se aleje del doce de las calendas de abril, decretamos que deberá ser añadido un bisiesto cada cuatro años, salvo durante los años de cambio de siglo; pero éstos, aunque hayan sido siempre bisiestos, y aunque queramos que el año 1600 lo siga siendo también, no lo seguirán siendo en adelante, sino que por cada periodo de cuatrocientos años, cada uno de los tres primeros años de comienzo de siglo serán sin bisiesto y el cuarto lo será, de manera que los años 1700, 1800 y 1900 no serán bisiestos, pero en el año 2000 será intercalado un bisiesto, según la costumbre, contando febrero 29 días, y que el mismo orden de omisiones y adiciones de bisiestos será siempre respetado en cada periodo de cuatrocientos años.

³⁹⁵ Además para que el día catorce de la luna de Pascua sea determinado con precisión y que el tiempo lunar sea presentado con exactitud a los fieles, conforme al uso antiguo de la Iglesia de proponer cada día la lectura del martirologio, ordenamos que una vez retirado el número áureo del calendario, se sustituya el

XI. Postremo, quoniam partim ob decem dies de mense Octobri anni MDLXXXII (qui correctionis annus recte dici debet) exemptos, partim ob ternos etiam dies quolibet quadingentorum annorum spatio minime intercalandos, interrumpatur necesse est cyclus literarum dominicalium XXVIII annorum ad hanc usque diem usitatus in Ecclesia Romana, volumus in eius locum substitui eundem cyclum XXVIII annorum, ab eodem Lilio, tum ad dictam intercalandi bissexti in centesimis annis rationem, tum ad quamcumque anni solaris magnitudinem, accommodatum; ex quo litera dominicalis beneficio cycli solaris, æque facile ac prius, ut in proprio canone explicatur, reperiri possit in perpetuum.³⁹⁶

XII. Nos igitur, ut quod proprium pontificis maximi esse solet exequamur, calendarium immensa Dei erga Ecclesiam suam benignitate iam correctum atque absolutum hoc nostro decreto probamus, et Romæ una cum martyrologio imprimi, impressumque divulgari iussimus³⁹⁷.

XIII. Ut vero utrumque ubique terrarum incorruptum ac mendis et erroribus purgatum servetur, omnibus in nostro et sanctæ Romanæ Ecclesiæ dominio mediate vel immediate subiecto commorantibus impressoribus, sub amissionis librorum ac centum ducatorum auri Cameræ Apostolicæ ipso facto applicandorum; aliis vero, in quacumque orbis parte consistentibus, sub excommunicationis latæ sententiæ ac aliis arbitrii nostri poenis, ne sine nostra licentia calendarium aut martyrologium, simul vel separatim, imprimere vel proponere, aut recipere ullo modo audeant vel præsumant, prohibemus³⁹⁸.

ciclo de las epactas que, gracias a sus reglas precisas antes mencionadas para el número áureo, hace posible que la nueva luna y el día catorce de Pascua sean siempre perfectamente localizados. Y esto se ve claramente en la explicación de nuestro calendario, en el cual se presentan también las tablas pascuales conforme a las antiguas costumbres de la Iglesia que permiten encontrar con toda certeza el sacrosanto día de la Pascua.

³⁹⁶ Por último, puesto que por una parte a causa de los diez días suprimidos del mes de octubre de 1582 (al cual debe llamarse correctamente el año de la reforma) y por otra a causa de los tres días que no deberán ser añadidos en cada periodo de cuatrocientos años, es necesario interrumpir el ciclo de 28 años de las letras dominicales en uso hasta hoy en la Iglesia romana. Queremos que sea sustituido por el mismo ciclo de 28 años adaptado por el mismo Lilio, tanto en la dicha intercalación de bisiestos en los comienzos de siglo, como en lo referente a la magnitud del año solar. Así la letra dominical será tan fácilmente determinada como antes con la ayuda del ciclo solar como se explica en el propio canon y se puede constatar a perpetuidad.

³⁹⁷ Nos, pues, conforme a lo que tradicionalmente ha sido atribuido al Sumo Pontífice, aprobamos el calendario, ahora reformado y perfeccionado gracias a la infinita benevolencia de Dios hacia la Iglesia; y ordenamos que sea impreso en Roma al mismo tiempo que el martirologio, y divulgado.

³⁹⁸ Para que verdaderamente uno y otro se mantengan intactos y fuera del alcance de errores y faltas en todo el mundo, prohibimos a los impresores establecidos en los territorios de la Santa Iglesia Romana,

XIV. Tollimus autem et abolemus omnino vetus calendarium, volumusque ut omnes patriarchæ, primates, archiepiscopi, episcopi, abbates et ceteri ecclesiarum præsides novum calendarium (ad quod etiam accomodata est ratio martyrologii), pro divinis officiis recitandis et festis celebrandis, in suas quisque ecclesias, monasteria, conventus, ordines, militias et dioeceses introducant, et eo solo utantur, tam ipsi quam ceteri omnes presbyteri et clerici sæculares et regulares utriusque sexus, necnon milites et omnes christifideles, cuius usus incipiet post decem illos dies ex mense Octobri anni MDLXXXII exemptos. Iis vero, qui adeo longinquas incolunt regiones, ut ante præscriptum a nobis tempus harum literarum notitiam habere non possint, liceat, eodem tamen Octobri mense insequentis anni MDLXXXIII vel alterius, cum primum scilicet ad eos hæ nostræ literæ pervenerint, modo a nobis paulo ante tradito, eiusmodi mutationem facere, ut copiosius in nostro calendario anni correctionis explicabitur³⁹⁹.

XV. Pro data autem nobis a Domino auctoritate hortamur et rogamus carissimum in Christo filium nostrum Rodolphum Romanorum regem illustrem in imperatorem electum, ceterosque reges, principes ac respublicas, iisdemque mandamus ut quo studio illi a nobis contenderunt, ut hoc tam præclarum opus perficeremus, eodem, immo etiam maiore, ad conservandam in celebrandis festivitatibus inter christianas nationes concordiam, nostrum hoc calendarium et ipsi suscipiant, et a cunctis sibi subiectis populis religiose suscipiendum inviolateque observandum curent⁴⁰⁰.

tener la osadía o la presunción de imprimir o de publicar sin nuestra autorización el calendario o el martirologio, junta o separadamente, o de sacar provecho en modo alguno, bajo pena de pérdida de los contratos y una multa de cien ducados de oro a pagar “ipso facto” a la Cámara Apostólica; en cuanto a los otros impresores establecidos en cualquier otra parte del mundo, le hacemos la misma prohibición bajo pena de excomunión “latae sententiae” y de otras penas a nuestra discreción.

³⁹⁹ Suprimimos y abolimos enteramente el antiguo calendario y queremos que todos los patriarcas, primados, arzobispos, obispos, abades y otros dirigentes de las iglesias, introduzcan, mediante la lectura del oficio divino y la celebración de las fiestas, cada uno en su iglesia, monasterio, convento, orden, milicias y diócesis, el nuevo calendario (al cual ha sido adaptado el martirologio) y no hagan uso, tanto ellos mismos como todos los otros presbíteros y clérigos seculares y regulares, de uno y otro sexo, así como a los militares y todos los cristianos, más que de este cuyo uso comienza tras esos diez días exentos del mes de octubre de 1582. En cuanto a aquellos que verdaderamente vivan en regiones alejadas, de tal manera que no haya tiempo material para que les llegue la noticia, autorizamos a que puedan suprimirlos en el mes de octubre del año siguiente de 1583, o al siguiente de éste, enseguida que le sea llegada esta Carta, de la manera que antes hemos indicado y que será abundantemente explicado en nuestro calendario del año de la reforma.

⁴⁰⁰ Por otra parte, en virtud de la autoridad de la que hemos sido investidos por Dios, exhortamos y rogamos a nuestro carísimo hijo en Cristo Rodolfo, ilustre rey de romanos elegido emperador, así como a los otros reyes y príncipes, igual que a las Repúblicas, y les recomendamos, siendo así que fuimos presionados para llevar a cabo esta obra tan admirable, con el fin de mantener la armonía en la

XVI. Verum, quia difficile foret præsentis literas ad universa christiani orbis loca deferri, illas ad basilicæ Principis Apostolorum et Cancellariæ Apostolicæ valvas, et in acie Campi Floræ publicari et affigi; et earundem literarum exemplis, etiam impressis, et voluminibus calendarii et martyrologii insertis et præpositis, sive manu tabellionis publici subscriptis, necnon sigillo personæ in dignitate ecclesiastica constitutæ obsignatis, eandem prorsus indubitam fidem ubique gentium et locorum haberi præcipimus, quæ originalibus literis exhibitis omnino haberetur⁴⁰¹.

XVII. Nulli ergo omnino hominum liceat hanc paginam nostrorum præceptorum, mandatorum, statutorum, voluntatis, probationis, prohibitionis, sublationis, abolitionis, hortationis et rogationis infringere, vel ei ausu temerario contraire. Si quis autem hoc attentare præsumpserit, indignationem omnipotentis Dei ac beatorum Petri et Pauli apostolorum eius se noverit incursurum⁴⁰².

Datum Tusculi, anno Incarnationis dominicæ MDLXXXI, sexto Kalendas Martii, pontificatus nostri anno X⁴⁰³.

(La version española de la Bula pontificia ha sido gentilmente cedida por mi buen amigo Santiago Martín Guerrero)

celebración de las fiestas entre todas las naciones cristianas, que adopten ellos mismos este calendario y cuiden de que todos sus súbditos lo adopten y lo observen escrupulosamente.

⁴⁰¹ Como verdaderamente será difícil hacer llegar las presentes letras a todos los lugares del orbe cristiano, ordenamos que se muestren al público en el tablón de anuncios de la basílica del Príncipe de los apóstoles y en el de la Cancillería apostólica, así como a la entrada del Campo de las Flores; y que en todos los pueblos y en todos los países se conceda el mismo crédito absoluto a las copias de estas letras, incluso impresas, acompañadas del calendario y del martirologio anteriormente mencionados, signadas por la mano de un fedatario público y autenticadas con el sello de un dignatario de la Iglesia, que a las originales.

⁴⁰² Que no le sea permitido, pues, enteramente, a nadie infringir lo prescrito en esta página, ordenanza, decreto, voluntad, aprobación, interdicción, supresión y ruego, o de oponerse a ello con temeraria audacia. Si, a pesar de ello, alguien tuviera tal osadía, ocasionará la indignación de Dios Todopoderoso y de los bienaventurados apóstoles Pedro y Pablo.

⁴⁰³ Dado en Túsculo el sexto de las calendas de marzo del año 1581 de la Encarnación, décimo de nuestro pontificado.

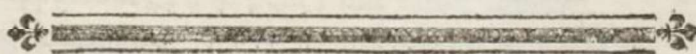
9. ANEXO III

*POÈMES SUR LA RELIGION NATURELLE, ET
SUR LA DESTRUCTION DE LISBONNE.*



P O È M E S
S U R
L A R E L I G I O N
N A T U R E L L E,
E T S U R L A D E S T R U C T I O N
D E L I S B O N N E.

*Par M. D E V***.*



M. DCC. LVI.

(Rés.)
8° B. L. 34104



P O È M E
S U R
LA DESTRUCTION
DE LISBONNE,
O U
EXAMEN DE CET AXIOME,
Tout est bien.



Malheureux Mortels ! ô terre déplorable !
O de tous les fléaux , assemblage effroyable !
D'inutiles douleurs , éternel entretien . . .
Philosophes trompés , qui criez , *tout est bien* ,
5 Accourez : contemplez ces ruines affreuses ,
Ces débris , ces lambeaux , ces cendres malheureuses.

C iij

Ces femmes , ces enfans , l'un sur l'autre entassés
 Sous ces marbres rompus , ces membres dispersés ;
 Cent mille infortunés que la Terre dévore ,
 10 Qui sanglans , déchirés , & palpitans encore ,
 Enterrés sous leurs toîts , terminent sans secours
 Dans l'horreur des tourmens leurs lamentables jours.
 Aux cris demi formés de leurs voix expirantes ,
 Au Spectacle effrayant de leurs cendres fumantes ,
 15 Direz-vous , ce sont là les salutaires Loix ,
 D'un Etre bienfaisant qui fit tout par son choix ?
 Direz-vous en voyant ces amas de victimes ,
 Dieu s'est vengé : leur mort est le prix de leurs crimes ?
 Quel crimes ? quelle faute ont commis ces Enfans
 20 Sur le sein maternel écrasés & sanglans ?
 Lisbonne qui n'est plus , eut-elle plus de vices
 Que Londres & que Paris plongés dans les délices ?
 Lisbonne est abîmée , & l'on danse à Paris.
 Tranquilles raisonneurs , intrépides esprits ,
 25 Si sur vous votre Ville eut été renversée ,
 On vous entendrait dire en changeant de pensée ,
 En pleurant vos enfans , & vos femmes , & vous ,
 Le bien fut pour Dieu seul , & le mal fut pour nous ,
 Quand la terre où je suis , porte sur des abîmes ,
 30 Ma plainte est innocente , & mes cris légitimes :
 Je suis environné des cruautés du sort ,
 Des fureurs des méchans , des pièges de la mort ;

De tous les Elemens j'éprouve les atteintes :
 Compagnons de mes maux , permettez-moi les plaintes.
 35 C'est l'orgueil , dites-vous , l'orgueil féditieux ,
 Qui prétend qu'étant mal , je pouvais être mieux.
 Allez , interrogez les rivages du Tage ,
 Fouillez dans les débris de ce sanglant ravage ,
 Demandez aux mourans , dans ce séjour d'effroi ,
 40 Si c'est l'orgueil qui crie , ô Dieu , secourez-moi.
 O Ciel , ayez pitié de l'humaine misère.
Tout est bien , dites-vous , & tout est nécessaire ;
 Quoi l'Univers entier sans ce gouffre infernal ,
 Sans engloutir Lisbonne eut-il été plus mal ?
 45 Etes-vous assurés que la Cause éternelle
 Qui sçait tout , qui fait tout , qui créa tout pour elle ,
 Ne pouvait nous jeter dans ces tristes climats
 Sans former des Volcans allumés sous nos pas ?
 Je désire humblement sans offenser mon Maître ,
 50 Que ce gouffre enflammé de souffre & de salpêtre ,
 Eut pû s'être formé dans le fond des déserts ;
 Je respecte mon Dieu , mais j'aime l'Univers.
 Quand l'homme ose gémir d'un fléau si terrible ,
 Il n'est point orgueilleux , hélas ! il est sensible.
 55 Qu'on ne présente plus à mon cœur agité
 Ces immuables Loix de la Nécessité ;
 Cette chaîne des corps , des esprits , & des mondes.
 O rêves de Sçavans ! ô chimères profondes !

Si l'éternelle Loi qui meut les élémens
 60 Fait tomber les rochers sous les efforts des vents,
 Si les chênes touffus, par la foudre s'embrasent,
 Ils ne ressentent point le coup qui les écrasent ;
 Mais je vis, mais je sens, mais mon cœur opprimé,
 Demande le bien être au Dieu qui l'a formé ;
 65 Des sens qu'il me donna je cherche un libre usage.
 D'où vient que l'ouvrier déchire son ouvrage ?
 Le vase, on le sçait bien, ne dit point au Potier,
 Pourquoi suis-je si vil, si faible, si grossier ?
 Il n'a point la parole, il n'a point la pensée :
 70 Cette urne en se formant, qui tombe fracassée,
 De la main du Potier ne reçut point un cœur,
 Qui desirât les biens, & sentît son malheur.
 Ce malheur, dites-vous, est le bien d'un autre être...
 De mon corps tout sanglant mille insectes vont naître.
 75 Quand la mort met le comble aux maux que j'ai soufferts,
 Le beau soulagement d'être mangé des vers !
 Tristes calculateurs des misères humaines,
 Ne me consolez point, vous aigrissez mes peines ;
 Et je ne vois en vous que l'effort impuissant,
 80 D'un fier infortuné qui feint d'être content.
 Je ne suis du grand tout, qu'une faible partie.
 Oui, mais les animaux condamnés à la vie,
 Tous les êtres sentans, nés sous la même loi,
 Vivent dans la douleur, & meurent comme moi.

85 Le vautour acharné sur sa timide proie ,
 De ses membres sanglans se repait avec joie ,
 Tout semble bien pour lui ; mais bientôt à son tour ,
 Une aigle au bec tranchant dévore le vautour.
 L'homme d'un plomb mortel , atteint cette aigle altière ,
 90 Et l'homme aux champs de Mars couché sur la poussière ,
 Sanglant , percé de coups , sur un tas de mourans ,
 Sert d'aliment affreux , aux oiseaux dévorans.
 Ainsi du monde entier , tous les membres gémissent ,
 Nés tous pour les tourmens , l'un par l'autre ils périssent.
 95 Et vous composerez dans ce cahos fatal ,
 Des malheurs de chaque être , un bonheur général.
 Quel bonheur ! ô mortel ! & faible & misérable ,
 Vous criez *tout est bien* , d'une voix lamentable :
 L'Univers vous dément , & votre propre cœur ,
 100 Cent fois de votre esprit a réfuté l'erreur.

Elémens , animaux , humains , tout est en guerre ;
 Il le faut avouer , le mal est sur la terre ;
 Son principe secret ne nous est point connu ,
 D'un Etre bienfaisant le mal est-il venu ?
 105 Est-ce le noir Tiphon (1) , le barbare Arimane , (2)
 Dont la loi tyrannique à souffrir nous condamne ?
 Mon esprit n'admet point ces monstres odieux ,
 Dont le monde en tremblant fit autrefois des Dieux.

(1) Principe du mal chez les Egyptiens.

(2) Principe du mal chez les Perses.

Mais comment concevoir , un Dieu la bonté même ,
 110 Un Dieu qui nous forma , qui nous chérit , qu'on aime ;
 Et qui brise à son gré l'ouvrage de ses mains !
 O qui pourra fixer mes esprits incertains !
 Mon œil épouvanté fonde envain ces abymes ,
 Je vois autour de moi les malheurs & les crimes.
 115 Je me tourne vers vous , Célestes vérités ,
 Les ténébres du monde offusquent vos clartés :
 Un Dieu vint consoler notre race affligée ,
 Il visita la terre , & ne l'a point changée. (1)
 Un Sophiste arrogant , nous dit qu'il ne l'a pû ;
 120 Il le pouvait , dit l'autre , & ne l'a point voulu.
 Il le voudra , sans doute , & tandis qu'on raisonne ,
 Des foudres souterrains engloutissent Lisbonne ,
 Et de trente cités dispersent les débris ,
 Des bords sanglans du Tage , à la mer de Cadix.
 125 Ou l'homme est né coupable , & Dieu punit sa race ,
 Ou ce Maître absolu de l'être & de l'espace ;
 Sans courroux , sans pitié , tranquille , indifférent ,
 De ses premiers décrets suit l'éternel torrent ;
 Ou la matière informe à son maître rebelle ,
 130 Porte en soi des défauts nécessaires comme elle ;
 Ou bien Dieu nous éprouve , & ce séjour mortel (2)
 N'est qu'un passage étroit vers un monde éternel.

(1) Un Philosophe Anglais a prétendu que le monde physique avait dû être changé au premier avènement comme le moral.

(2) Voilà le nœud & l'objet de l'ouvrage , la Révélation seule peut nous éclairer.

Nous effuyons ici des douleurs passagères ;
 Le trépas est un bien qui finit nos misères ;
 135 Mais quand nous sortirons de ce passage affreux ,
 Qui de nous prétendra mériter d'être heureux ?
 Quelque parti qu'on prenne , on doit fremir , sans doute ,
 Il n'est rien qu'on connaisse , & rien qu'on ne redoute.
 La Nature est muette , on l'interroge envain :
 140 On a besoin d'un Dieu qui parle au genre humain ;
 Il n'appartient qu'à lui d'expliquer son ouvrage ,
 De consoler le foible , & d'éclairer le sage ;
 L'homme au doute , à l'erreur , abandonné sans lui ,
 Cherche envain des roseaux qui lui servent d'appui.
 145 Léibnitz ne m'apprend point par quels noeuds invisibles ,
 Dans la mieux ordonnée des Univers possibles ,
 Un désordre éternel , un cahos de malheurs ,
 Mêlé à nos vains plaisirs , de réelles douleurs :
 Ni pourquoi l'innocent , ainsi que le coupable ,
 150 Subit également ce mal inévitable.
 Je ne conçois pas plus , comment tout serait bien :
 Je suis comme un Docteur , hélas ! je ne sçais rien.
 Platon dit qu'autrefois l'homme avait eû des aîles ,
 Un corps impénétrable aux atteintes mortelles ;
 155 La douleur , le trépas , n'approchaient point de lui ,
 De cet état brillant , qu'il diffère aujourd'hui !
 Il rampe , il souffle , il meurt , tout ce qui naît expire.
 De la destruction , la Nature est l'Empire.

Un faible composé de nerfs & d'ossemens ,
 150 Ne peut être insensible au choc des élémens ;
 Ce mélange de sang , de liqueur , & de poudre ,
 Puisqu'il fut assemblé , fut fait pour se dissoudre ;
 Et le sentiment prompt de ses nerfs délicats ,
 Fut soumis aux douleurs , ministres du trépas.
 165 C'est-là ce que m'apprend la voix de la Nature.
 J'abandonne Platon , je rejette Epicure ;
 Bayle (i) en sçait plus qu'eux tous : je vais le consulter :
 La balance à la main , Bayle enseigne à douter ;
 Assez sage , assez grand , pour être sans système ,
 170 Il les a tous détruit , & se combat lui-même.
 L'homme étranger à soi , de l'homme est ignoré ,
 Qui suis-je ? où suis-je ? où vais-je ? & d'où suis-je tiré ?
 Atômes tourmentés sur ces amas de boüe ,
 Que la mort engloutit , & dont le fort se joüe ;
 175 Mais atômes pensans , atômes dont les yeux ,
 Guidés par la pensée ont mesuré les Cieux :
 Au sein de l'infini , nous élançons notre être ,
 Sans pouvoir un moment nous voir & nous connaître.
 Que faut-il , ô Mortels ! mortels il faut souffrir ,
 180 Se soumettre en silence , adorer , & mourir .

(i) Bayle a laissé cette grande question indécise.

F I N.

ADDITION

Au Poëme sur la Destruction de
Lisbonne.

Au lieu des Vers 179 & 180, mettez ce qui suit.

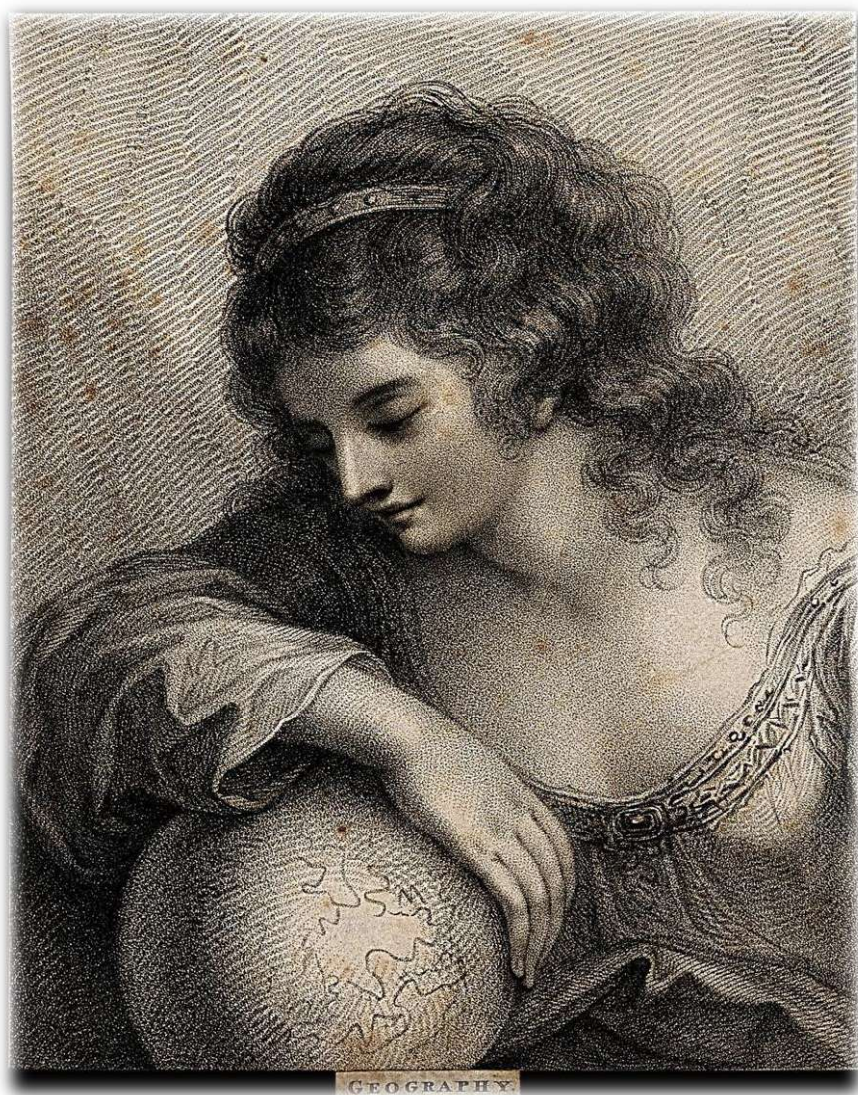
JE sçais que dans nos jours consacrés aux douleurs ,
Par la main du Plaisir nous effuyons des pleurs ;
Mais le Plaisir s'envole & passe comme une ombre ,
Nos chagrins , nos regrets , nos pertes sont sans nombre ;
Le Passé n'est pour nous qu'un triste souvenir ,
Le Présent est affreux s'il n'est point d'Avenir ;
Si la nuit du tombeau détruit l'Etre qui pense ,
Un jour tout sera bien. Voila notre espérance.
Tout est bien aujourd'hui. Voila l'illusion.



Les Sages me trompoient , & Dieu seul a raison.
Humble dans mes soupirs , soumis dans ma souffrance ,
Je n'interroge point la suprême Puissance.
Sur un ton moins lugubre on me vit autrefois
Chanter des vains plaisirs les séduisantes Loix.
Instruit par les douleurs , instruit par la vieillesse ,
Des malheureux humains déplorant la faiblesse ,
Mon cœur compatissant gémit sans murmurer ,
Sans accuser le Dieu que je dois implorer.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	27
2. ASTRONOMÍA ESFÉRICA.....	162
3. GEODESIA Y METROLOGÍA.....	211
4. CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA.....	235
5. TOPOGRAFÍA.....	297
6. APUNTES SISMOLÓGICOS.....	317
7. ANEXO I:	
LA FIGURA DE LA TIERRA SEGÚN JOSÉ MARIANO VALLEJO.....	339
8. ANEXO II:	
BULA DEL PAPA GREGORIO XIII CON LA REFORMA DEL CALENDARIO.....	347
9. ANEXO III:	
POÈMES SUR LA RELIGION NATURELLE, ET SUR LA DESTRUCTION DE LISBONNE...	358



Benito Bails fue el prototipo de hombre ilustrado que cultivó especialmente la arquitectura y la matemática. Aunque nacido en Sant Adrià de Besòs, adquirió la mayor parte de su formación en Francia. Desde allí se trasladó a España para instalarse en Madrid y ejercer como Director de Matemáticas en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando. Su producción bibliográfica fue brillante, destacando sus monumentales Elementos de Matemática. En ellos se recogen tanto las bases teóricas como sus múltiples aplicaciones. Precisamente se analizan en el presente libro las que se refieren a la Geografía Astronómica, una rama de las ciencias exactas dedicada al estudio de la forma y representación de la superficie terrestre. Bails explicó con singular maestría los fundamentos de la misma, ilustrando su trabajo con numerosas y precisas figuras, acompañadas en muchos casos de los correspondientes ejercicios.